

Ringraziamenti

Questa tesi non è solo il frutto di tre anni del mio lavoro individuale. Sarebbe in tal caso opera ben più limitata e provvisoria di quanto in realtà sia. In questo momento non posso non ricordare il mio professore di filosofia del Liceo: questo mio vero, e forse unico, educatore intellettuale amava ripetere che l'orizzonte di noi uomini è certamente limitato a confronto di quello dei titani; ma anche un nano, aggiungeva, arrampicandosi sulle spalle dei giganti, può guardare pochi centimetri più lontano di loro. Un nano sulle spalle dei giganti guarda più lontano dei giganti stessi. Semplice e complesso allo stesso tempo: una scalata richiede fatica, concentrazione, sacrifici. Ma deve essere tentata. Ecco, questa tesi è un'arrampicata, anzi un tentativo di arrampicata, sulle spalle di figure titaniche; arrampicata affrontata con l'unico scopo di allargare il nostro orizzonte, anche di pochi centimetri. Non altro.

Allora dovrei ringraziare i giganti che hanno prestato le loro spalle al mio tentativo di scalata? Purtroppo ricordarli tutti è impresa titanica, e dunque degna di loro, non di me. Mi limiterò a ringraziare quelli che mi sono stati più vicini in questi anni di studio.

Il primo ringraziamento va al prof. Lorenzo Sciavicco, per aver acceso in me il suo stesso amore per la ricerca, per avermi sostenuto con la sua carica umana e guidato con la sua esperienza.

Grazie a Pasquale Chiacchio, per avermi insegnato ad apprendere dai miei errori ed a non arrendersi di fronte ad essi, e per avermi stimolato continuamente a migliorare i miei metodi ed il mio approccio alla ricerca. Grazie a Stefano Chiaverini e Bruno Siciliano, per la loro totale e costante disponibilità nel rispondere, anche nei momenti meno opportuni, ai miei quesiti: parte del loro bagaglio culturale è adesso

anche un mio patrimonio.

Un ringraziamento anche al mio amico e collega Paolo Rubino, per avermi sempre incoraggiato e sostenuto nella scelta di questo lavoro, e per avermi consigliato nei momenti difficili.

Prezioso è stato anche il sostegno e l'amicizia dei miei colleghi, in particolare di Luigi Villani, Alberto Cavallo, Roberto Setola, Francesco Vasca e Massimiliano Mattei.

Desidero ringraziare i miei familiari, per aver partecipato al mio entusiasmo per questo lavoro ed ai sacrifici fatti per portarlo a termine, e Patrizia, per aver sopportato con pazienza il tempo sottratto a lei.

Infine, desidero ringraziare un vero titano: quel misconosciuto, severo e saggio professore di filosofia che mi ha insegnato a non aver paura dei giganti.

“O martirio dei tuoi nemici, il sacrificio che consiste nella conoscenza è preferibile al sacrificio delle ricchezze. Ogni azione, o Prithide, è compresa per intero nella conoscenza.”

Bhagavad gîtâ, *Lettura IV*, 33.

“Anche i seguaci dell'azione pervengono a quella sede dove arrivano i seguaci della conoscenza. Solo colui, che considera come una sola cosa la conoscenza e l'azione, vede veramente chiaro.”

Bhagavad gîtâ, *Lettura V*, 6.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Modellistica	3
1.2	Controllo	6
2	Modellistica	13
2.1	Cinematica e statica	14
2.1.1	Cinematica e statica dei singoli manipolatori . . .	14
2.1.2	Cinematica e statica dell'oggetto manipolato . . .	15
2.1.3	Formulazione simmetrica	17
2.1.4	Formulazione orientata al compito	22
2.1.5	Relazioni tra le due formulazioni	25
2.2	Dinamica	27
2.2.1	Modello dinamico nello spazio dei giunti	28
2.2.2	Modello dinamico nello spazio oggetto	30
2.2.3	Modello dinamico nello spazio operativo di co- operazione	31
3	Controllo cinematico	33
3.1	Algoritmi di inversione cinematica	34
3.2	Controllo del moto dei giunti	39
4	Regolazione nello spazio dei giunti	41
4.1	Regolatore PD con compensazione di gravità	43
4.2	Analisi di stabilità	46
4.3	Compensazione non accurata dei termini gravitazionali .	48

4.4	Regolazione delle forze interne	50
5	Regolazione nello spazio operativo	53
5.1	Rappresentazione dell'orientamento	54
5.2	Regolatore PD con compensazione di gravità	56
5.3	Analisi di stabilità	61
5.4	Compensazione non accurata dei termini gravitazionali .	64
5.5	Regolazione delle forze interne	65
6	Risultati sperimentali	69
6.1	L'installazione sperimentale	70
6.1.1	Il controllore C3G 9000 aperto	71
6.1.2	I manipolatori e l'oggetto	73
6.1.3	I sensori di forza generalizzata	74
6.1.4	La stazione di controllo	75
6.1.5	Realizzazione dell'installazione	75
6.2	Modellazione dei manipolatori	79
6.2.1	Cinematica	80
6.2.2	Dinamica	84
6.3	Controllo cinematico	85
6.4	Regolazione	89
7	Conclusioni	103
	Bibliografia	106
A	Teoremi di La Salle	113

Capitolo 1

Introduzione

Lo sviluppo sia applicativo che teorico della robotica è stato incentrato principalmente su sistemi di manipolazione artificiale costituiti da una *catena cinematica aperta* di corpi rigidi o flessibili, connessi da *giunti* di movimentazione. Negli ultimi anni, la domanda di prestazioni sempre più spinte e l'esigenza di adottare sistemi robotici in nuovi campi applicativi ha spinto la comunità scientifica internazionale verso nuovi temi di ricerca teorica ed applicata.

Tra le problematiche di ricerca più sentite negli ultimi anni, la necessità di analizzare la possibilità di *cooperazione* fra più unità di manipolazione si è imposta all'attenzione generale della comunità robotica.

Da subito è stato chiaro che i vantaggi derivanti dall'adozione di sistemi costituiti da più manipolatori cooperanti nello svolgimento di un compito sono molteplici: un *sistema di manipolatori cooperanti* (o semplicemente *sistema cooperante*) è infatti caratterizzato da superiori capacità di manipolazione e di carico rispetto al caso del manipolatore singolo. Queste caratteristiche rendono tali sistemi adatti ad applicazioni quali il trasporto di carichi di peso e/o ingombro elevato, la manipolazione di oggetti caratterizzati da elevata flessibilità ed operazioni di assemblaggio di elevata complessità.

In questa dissertazione l'espressione *sistema di manipolatori coope-*

ranti (o semplicemente *sistema cooperante*) indicherà in modo generico due situazioni fisiche diverse:

- si parlerà di *cooperazione in senso lasco* quando i manipolatori facenti parte del sistema non sono fisicamente interagenti tra di loro; in tal caso ci si riferisce alla cooperazione essenzialmente nel senso di *puro coordinamento* del moto fra le unità facenti parte del sistema;
- si parlerà di *cooperazione in senso stretto* quando i robot interagiscono tra di loro attraverso un *oggetto* comune meccanicamente connesso a tutte le unità facenti parte del sistema cooperante.

Nel primo caso l'interazione tra i manipolatori è essenzialmente di tipo cinematico, mentre nel secondo si estrinseca attraverso lo scambio di forze e momenti che influenzano reciprocamente il moto delle singole unità.

Nel caso di sistemi robotici cooperanti in senso stretto è di particolare interesse il caso in cui l'oggetto è perfettamente rigido, e la connessione manipolatore/oggetto è anch'essa rigida (*presa rigida*). In tal caso il sistema costituito dai manipolatori e l'oggetto è modellabile come una *catena cinematica chiusa* di corpi rigidi (Luh e Zheng, 1987; Tarn *et al.*, 1987). Ne consegue che il moto dell'organo terminale di ciascun manipolatore non risulta indipendente da quello delle altre unità di manipolazione costituenti il sistema cooperante; matematicamente ciò si traduce nella comparsa di vincoli cinematici sulle variabili che descrivono la postura degli organi terminali dei due manipolatori (*vincoli di catena chiusa*). Naturalmente ciò è vero anche quando l'oggetto manipolato possiede dei gradi di libertà interni rappresentabili mediante giunti rigidi (*oggetti articolati*); in tal caso le equazioni di vincolo esibiscono una dipendenza anche dalle variabili di giunto dell'oggetto (Luh e Zheng, 1987).

Una classe di sistemi di manipolazione artificiale molto importante è quella delle *mani di presa robotiche*; è naturale considerare queste ultime come sistemi di manipolazione cooperante in cui le singole unità di manipolazione sono costituite dalle dita della mano. In tal caso la presa

dell'oggetto non è considerata rigida, ma è in generale caratterizzata da gradi di libertà che permettono il rotolamento o lo strisciamento del punto terminale di ciascuna unità di manipolazione lungo la superficie dell'oggetto. Per questa classe di sistemi le equazioni di vincolo dipenderanno anche dallo stato del contatto manipolatore/superficie dell'oggetto (Nakamura et al., 1989).

Alcuni esempi di applicazione in ambito industriale di sistemi di manipolatori cooperanti:

- a. compiti di saldatura su profili complessi: in tal caso uno dei manipolatori trasporterà l'oggetto da saldare, mentre un secondo manipolatore, coordinandosi con il primo, muoverà la punta di saldatura;
- b. assemblaggio di parti meccaniche complesse, in cui le parti da assemblare possono essere posizionate ed orientate da due manipolatori in moto coordinato;
- c. trasporto di parti caratterizzate da elevati ingombri e flessibilità: in tal caso l'adozione di più manipolatori per il trasporto di tali oggetti può portare alla riduzione delle vibrazioni indotte dal moto potenzialmente dannose per la struttura.

In ambito più avanzato le applicazioni più promettenti sembrano situarsi nell'ambito della manipolazione di oggetti da parte di mani robotiche e del trasporto di oggetti mediante robot montati su piattaforme mobili.

1.1 Modellistica

Dalle considerazioni precedenti si evince che i problemi di modellistica matematica dei sistemi cooperanti non possono essere risolti estendendo i risultati disponibili per i manipolatori a catena cinematica aperta. Un passo fondamentale per la modellazione dei sistemi cooperanti è l'identificazione di un opportuno insieme di variabili per la descrizione cinematica e statica del sistema. Nel caso di sistemi cooperanti per la

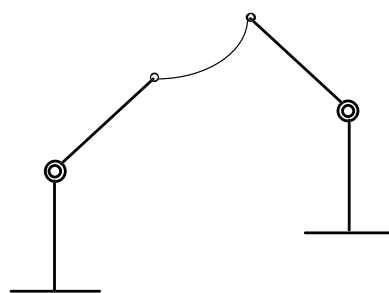
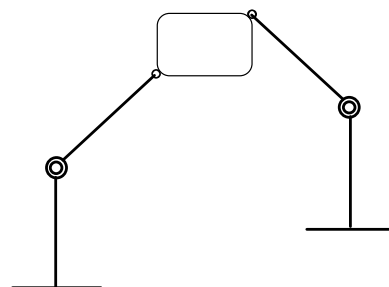
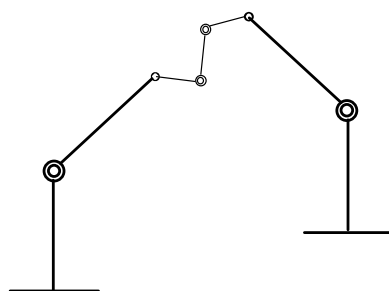
**A****B****C**

Figura 1.1: Esempi di manipolazione cooperante in senso stretto. A: oggetto flessibile e/o deformabile. B: oggetto rigido. C: oggetto articolato.

manipolazione di oggetti rigidi con presa rigida, di fondamentale importanza è la formulazione cinetostatica *simmetrica* proposta in (Uchiyama e Dauchez, 1993), in cui viene stabilito il concetto chiave di *forze esterne* ed *interne*: le prime sono le forze generalizzate che danno contributo effettivo al moto dell'oggetto manipolato, mentre le seconde rappresentano sforzi meccanici applicati all'oggetto e non contribuiscono al moto dello stesso. La formulazione simmetrica, che pure ha il pregio di introdurre in maniera chiara alcuni aspetti fisici della cinetostatica dei sistemi cooperanti, si basa sulla identificazione di forze e velocità generalizzate fisicamente rilevanti per la descrizione completa della cinetostatica del sistema; essa presenta però anche alcuni svantaggi:

- l'identificazione delle variabili di orientamento associate alle velocità angolari esterne ed interne (duali dei momenti esterni ed interni) non è agevole ;
- le grandezze cinetostatiche definite non conservano un significato fisico chiaro quando si abbandona l'ipotesi di oggetto rigido.

In alternativa alla formulazione simmetrica, può essere opportuno considerare la formulazione *orientata al compito* proposta in (Chiacchio *et al.*, 1996). Tale formulazione definisce direttamente le variabili di posizione ed orientamento in grado di descrivere il compito in termini di moto *assoluto* e *relativo* del sistema cooperante. I vantaggi di tale formulazione sono essenzialmente:

- semplicità di descrizione del compito di moto coordinato tramite variabili di posizione ed orientamento geometricamente significative ed immediatamente individuabili da parte dell'utente;
- possibilità di descrivere situazioni di contatto non rigido tra manipolatori ed oggetto;
- possibilità di sfruttare la formulazione anche nei casi di oggetto non rigido o di puro coordinamento del moto.

In questa dissertazione vengono approfonditi alcuni aspetti relativi alla cinetostatica della formulazione orientata al compito: in particolare sono state derivate le relazioni intercorrenti tra le grandezze cinetostatiche (forze e velocità generalizzate) definite nell'ambito della formulazione orientata al compito e quelle definite nell'ambito della formulazione simmetrica. I risultati ottenuti permettono di evidenziare in maniera chiara che la formulazione orientata al compito è in grado di descrivere completamente il sistema sia dal punto di vista geometrico che cinetostatico. Inoltre è stato possibile derivare anche l'espressione delle variabili di orientamento associate alle velocità angolari esterne ed interne definiti nell'ambito della formulazione simmetrica.

Una caratteristica fondamentale dei sistemi robotici cooperanti in senso stretto risiede nel fatto che le equazioni dinamiche nello spazio dei giunti, a causa della presenza dei vincoli di catena chiusa, prendono la forma di un sistema di equazioni algebro-differenziali (o sistema DAE, *Differential Algebraic Equations*). Tale particolarità rende piuttosto delicata la fase di simulazione del comportamento dinamico del sistema, costringendo al ricorso a procedure di eliminazione delle equazione algebriche di vincolo (Koivo e Unseren, 1991), o all'adozione di solutori di sistemi di equazioni differenziali in forma DAE. In questa dissertazione vengono derivate anche le equazioni dinamiche e l'espressione dei vincoli di un sistema cooperante con oggetto rigido in presa rigida nello *spazio oggetto* derivante dalla formulazione simmetrica, e nello *spazio operativo di cooperazione* derivante dalla formulazione orientata al compito.

1.2 Controllo

Anche le strategie di controllo di un sistema robotico cooperante in senso stretto non possono essere riguardate come semplice estensione di quelle sviluppate per manipolatori a catena cinematica aperta. Storicamente si possono distinguere tre diversi approcci al controllo dei sistemi cooperanti: controllo *master/slave*, controllo basato sul *coordinamento del moto* e controllo *leader/follower*.

Nell'approccio *master/slave* (Nakano *et al.*, 1974; Ishida, 1977) si individua un manipolatore (*master*) che ha il compito di imporre il moto desiderato all'oggetto manipolato, e quindi viene controllato in posizione. Gli altri manipolatori del sistema cooperante (*slave*) sono controllati in forza: il controllore di forza ha il compito di conferire a ciascun manipolatore una elevata cedevolezza, in modo da assecondare il moto imposto dal manipolatore *master*. La strategia *master/slave* è l'approccio storicamente più vecchio e meno efficiente al problema della manipolazione cooperante. Infatti, l'assegnazione di una cedevolezza molto bassa ai manipolatori che svolgono il ruolo di *slave* pone non pochi problemi realizzativi su robot di tipo industriale. Inoltre, i criteri e le modalità con cui i ruoli di *master* e *slave* devono essere assegnati alle unità di manipolazione pone alcuni problemi di supervisione e controllo, soprattutto se il processo di decisione ed assegnazione dei ruoli si svolge durante l'esecuzione del compito.

Nell'approccio *leader/follower* (Luh e Zheng, 1987; Zheng *et al.*, 1987) i vincoli cinematici di catena chiusa vengono tenuti esplicitamente in conto nella pianificazione dei riferimenti per gli anelli di controllo del moto dei singoli manipolatori. Un approccio concettualmente analogo, basato sulla risoluzione della cinematica inversa dei singoli manipolatori, viene adottato congiuntamente con un controllo delle forze applicate all'oggetto manipolato in (Alberts e Soloway, 1988). Un punto di debolezza delle strategie basate sul coordinamento cinematico dei singoli manipolatori risiede nella difficoltà di specificare le forze di interazione tra oggetto trasportato ed ambiente esterno; risulta inoltre molto complesso compensare la dinamica non lineare dell'intero sistema.

La presenza dei vincoli di catena chiusa e la necessità di assicurare l'effettivo coordinamento del moto tra i manipolatori costituenti il sistema suggeriscono di considerare il sistema nel suo insieme ed analizzare le trasformazioni cinetostatiche tra forze e velocità definite a livello di singolo manipolatore e le loro controparti definite a livello di oggetto manipolato. Molti schemi di controllo proposti nella letteratura più recente partono da tali premesse: essi si basano sulla specifi-

cazione diretta del moto dell'oggetto (*controllo nello spazio oggetto*) e delle forze agenti su di esso. Tali schemi assicurano sia il controllo del moto dell'oggetto rispetto ad un riferimento fissato che delle forze interne ad esso applicate (Tarn *et al.*, 1988; Khatib, 1995; Li *et al.*, 1989; Wen e Kreutz-Delgado, 1992; Hsu, 1993; Hu *et al.*, 1995). In questo ambito si situano anche gli schemi di controllo ibrido forza/posizione dell'oggetto manipolato (Hayati, 1986; Dauchez e Uchiyama, 1993).

Infine, un'area di ricerca molto vicina al controllo nello spazio oggetto riguarda il *controllo d'impedenza* per sistemi di manipolatori cooperanti (Schneider e Cannon, 1992): in tal caso la legge di controllo è progettata in modo da imporre un legame di impedenza meccanica tra le forze applicate all'oggetto manipolato e le variabili di moto corrispondenti; il comportamento dinamico dell'impedenza così specificata risulta caratterizzata da costanti di massa, elasticità e smorzamento specificabili dall'utente.

Una prima alternativa agli schemi citati è una strategia di controllo nota come *controllo cinematico*, che in questa dissertazione viene estesa al caso dei sistemi cooperanti (Caccavale *et al.*, 1996c). Tale strategia si basa su uno schema di principio a due stadi:

1. nel primo stadio, basandosi sulla formulazione orientata al compito, vengono definiti i riferimenti di spazio operativo di cooperazione che descrivono il compito; utilizzando un algoritmo di inversione della cinematica del sistema cooperante da tali riferimenti vengono ricavate le variabili di giunto corrispondenti;
2. nel secondo stadio, sulla base dei riferimenti di giunto generati dall'inversione cinematica, viene realizzato il controllo del moto dei singoli giunti delle unità di manipolazione presenti nel sistema.

Un vantaggio di questo approccio risiede nella sua elevata compatibilità con unità di governo robotiche industriali, essendo possibile, in linea di principio, conservare i regolatori industriali standard (ad esempio di tipo PID) per il controllo del moto dei giunti. Altri vantaggi consistono nella possibilità di gestire in modo relativamente semplice la

eventuale ridondanza cinematica del sistema cooperante e l'occorrenza di singolarità cinematiche.

In definitiva il controllo cinematico di sistemi cooperanti risulta essere una strategia attraente per la risoluzione di problemi di puro coordinamento del moto in ambito industriale. La validazione sperimentale di tale strategia di controllo, condotta utilizzando una installazione cooperante basata su unità di controllo robotiche standard, ha confermato le sue potenzialità applicative in ambito industriale.

Nel caso di un sistema di manipolatori cooperanti in senso stretto, l'adozione di uno schema di controllo cinematico con controllo del moto dei giunti attuato attraverso schemi decentralizzati, può portare alla comparsa di forze interne all'oggetto manipolato. Queste possono essere dovute a cause di varia natura: traiettorie ai giunti generate dall'algoritmo di inversione cinematica non compatibili con i vincoli di catena cinematica chiusa, effetti dinamici non compensati, errori di inseguimento ai giunti.

Allo scopo di ridurre l'insorgere di forze interne e conservare la semplicità degli schemi di controllo senza compensazione dinamica, in questo studio viene generalizzata una legge di controllo basata su un regolatore di tipo PD con compensazione di gravità, a cui viene aggiunto un *filtraggio cinetostatico* dell'azione di controllo (Chiacchio e Chiaverini, 1996).

Tale strategia permette di ottenere una drastica riduzione delle forze interne a regime anche se i riferimenti ai giunti sono incompatibili con i vincoli di catena chiusa; per incrementare ulteriormente le prestazioni dello schema viene introdotta anche un'azione di controllo delle forze interne. Le prestazioni del regolatore sono state analizzate in termini di proprietà di stabilità (Caccavale *et al.*, 1996e) anche nel caso di compensazione imperfetta dei contributi di gravità dell'oggetto manipolato e/o dei manipolatori (Caccavale *et al.*, 1997a).

I risultati sperimentali riportati in questo lavoro di tesi confermano la bontà di questo approccio, anche nel caso in cui vengano meno le ipotesi di oggetto e/o presa rigida.

Una differente strategia per la progettazione del controllo per sistemi

robotici consiste nel sintetizzare la legge di controllo direttamente nello spazio operativo (Khatib, 1987); ciò implica che l'anello di retroazione debba elaborare riferimenti e segnali di retroazione nello spazio operativo di cooperazione, e che al suo interno si localizzi una operazione rappresentativa di una inversione cinematica. Basandosi su tali premesse, in questa tesi viene generalizzato un approccio alla regolazione di sistemi cooperanti basato su un regolatore PD con compensazione di gravità, progettato direttamente nello spazio operativo di cooperazione (Caccavale *et al.*, 1996d; Caccavale *et al.*, 1997b). Anche in questo caso viene utilizzato un filtraggio cinetostatico dell'azione di controllo per ridurre le forze interne a regime.

Sfruttando le premesse teoriche descritte in (Yuan, 1988), la legge di controllo nello spazio operativo utilizza una espressione degli errori di orientamento in termini di quaternioni; in tal modo si ottiene una espressione degli errori di inseguimento più significativa da un punto di vista fisico rispetto ad altre forme di rappresentazione dell'orientamento. Per incrementare le prestazioni del regolatore si può introdurre anche in questo caso un'azione di controllo delle forze interne.

Anche in questo caso, i risultati sperimentali evidenziano buone prestazioni delle leggi di controllo proposte, sia in termini di inseguimento dei riferimenti posizionali che di riduzione degli sforzi meccanici interni applicati all'oggetto.

Una parte consistente di questo studio è stata dedicata alla validazione sperimentale degli schemi di controllo proposti. Premessa necessaria di questa attività è stata la messa a punto di una installazione di manipolazione cooperante per lo sviluppo di algoritmi di controllo non standard, basata su due robot industriali COMAU della famiglia SMART-3 S. L'installazione è dotata di una architettura di controllo *aperta* basata sulle unità di governo C3G 9000 dei due robot; entrambe le unità sono sincronizzate con un *Personal Computer* con processore Pentium a 133 MHz che funge da stazione di controllo del sistema. Gli algoritmi di controllo sviluppati dall'utente sono realizzati mediante moduli software sviluppati in linguaggio C.

Il sistema formato dalle due unità di manipolazione può essere confi-

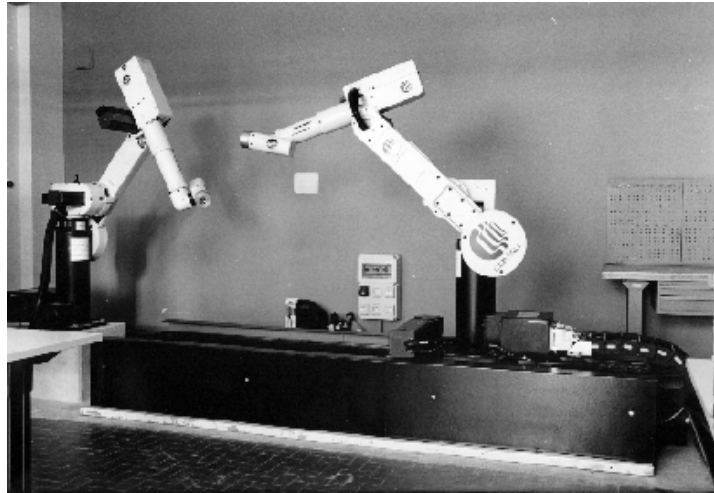


Figura 1.2: Il sistema cooperante di manipolatori industriali installato presso il laboratorio PRISMA.

gurato in diversi modi; in particolare è possibile configurare i due robot in modo tale da ottenere una sistema planare o spaziale, cinematicamente ridondante o meno. Sfruttando le potenzialità dell'architettura aperta sono stati identificati i parametri dinamici del modello matematico dei singoli manipolatori, e si è calibrato cinematicamente il sistema mediante prove sperimentali mirate alla determinazione della posizione relativa dei due manipolatori.

Attualmente il sistema è installato presso il Laboratorio PRISMA (*Progetti di Robotica Industriale Servomeccanismi ed Automazione*) del Dipartimento di Informatica e Sistemistica dell'Università di Napoli, dove viene utilizzato per attività di ricerca in robotica avanzata.

Utilizzando l'installazione sperimentale descritta, gli algoritmi di controllo proposti in questa tesi sono stati validati sperimentalmente, mettendone in luce limiti e vantaggi nella loro applicazione pratica.

Capitolo 2

Modellistica

Un manipolatore robotico può essere schematizzato come una catena cinematica di corpi rigidi (*bracci*) connessi tramite *giunti* di movimentazione. Il moto della struttura è dunque ottenibile come composizione di moti elementari di ciascun braccio rispetto al precedente, generati applicando forze o coppie a ciascun giunto. D'altra parte, l'assegnazione di un compito di manipolazione avviene in modo naturale attraverso la specificazione del moto desiderato dell'organo terminale del manipolatore, espresso in termini di posizione e di orientamento di una terna ad esso solidale. Con linguaggio più sintetico si dirà che il moto del manipolatore è ottenuto nello *spazio dei giunti*, mentre la specificazione del compito avviene nello *spazio operativo*. Per *cinetostatica* di un manipolatore si intende l'insieme di relazioni cinematiche e statiche che legano le grandezze cinematiche (variabili di velocità lineare ed angolare) e statiche (forze e coppie) definite nello spazio operativo alle corrispondenti definite nello spazio dei giunti.

Per i sistemi costituiti da più manipolatori cooperanti nello svolgimento di un compito assegnato, la definizione delle grandezze di spazio operativo e le relative equazioni cinetostatiche ricoprono un ruolo di fondamentale importanza nella descrizione dell'intero sistema, in particolare per la definizione delle *forze interne* e *forze esterne* applicate

all'eventuale oggetto manipolato.

In questo capitolo si confrontano due diverse formulazioni della cinetostatica di un sistema cooperante in senso stretto: la prima, detta *formulazione simmetrica*, è legata direttamente alla definizione del significato fisico di forze interne ed esterne, mentre la seconda, proposta in (Chiacchio *et al.*, 1997), ha il pregio di semplificare notevolmente l'assegnazione di un compito di moto coordinato da parte dell'utente (*formulazione orientata al compito*).

Una volta definite la cinematica e la statica di un sistema cooperante, il modello dinamico può essere ricavato sia in termini di variabili di giunto che di spazio operativo.

Per i concetti base e le notazioni usate relativamente alla cinematica ed alla dinamica dei singoli manipolatori si farà riferimento a (Sciavicco e Siciliano, 1996).

2.1 Cinematica e statica

Si consideri un sistema costituito da due manipolatori ciascuno avente n_i giunti ($i = 1, 2$); per fissare le idee, si supponrà $n_1 = n_2 = 6$. Sia \mathbf{p}_i il vettore (3×1) che denota la posizione della terna \mathcal{T}_i solidale all'organo terminale dell' i -esimo manipolatore; si denoti con \mathbf{R}_i la matrice (3×3) che esprime l'orientamento della terna \mathcal{T}_i . Tutte le quantità prima definite si intendono espresse rispetto ad una terna base comune \mathcal{T} .

2.1.1 Cinematica e statica dei singoli manipolatori

Sia \mathbf{p}_i che \mathbf{R}_i sono legate al vettore variabili di giunto del relativo manipolatore \mathbf{q}_i attraverso le equazioni di *cinematica diretta*

$$\begin{cases} \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(\mathbf{q}_i) \\ \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(\mathbf{q}_i). \end{cases} \quad (2.1)$$

La velocità lineare dell'organo terminale è definita direttamente come derivata rispetto al tempo del vettore posizione associato $\dot{\mathbf{p}}_i$. La velocità angolare dell'organo terminale $\boldsymbol{\omega}_i$ è legata alla derivata prima

della matrice di rotazione associata attraverso l'equazione

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i)\mathbf{R}_i, \quad (2.2)$$

dove $\mathbf{S}(\cdot)$ è una matrice antisimmetrica (3×3) che realizza l'operatore di prodotto vettoriale. Si denoti con $\mathbf{v}_i = [\dot{\mathbf{p}}_i^T \ \boldsymbol{\omega}_i^T]^T$ il vettore che esprime la velocità generalizzata dell'organo terminale del manipolatore i . La relazione fra i due vettori di velocità è data da

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{J}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i, \quad (2.3)$$

dove la matrice \mathbf{J}_i è lo *Jacobiano geometrico* dell' i -esimo manipolatore, e la (2.3) definisce la *cinematica differenziale* diretta del manipolatore.

Si consideri il vettore (6×1) di forza generalizzata all'organo terminale i -esimo

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \boldsymbol{\mu}_i \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

dove \mathbf{f}_i e $\boldsymbol{\mu}_i$ sono rispettivamente la forza ed il momento all'organo terminale del manipolatore i -esimo. Applicando il principio dei lavori virtuali si può determinare la relazione duale della (2.3)

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_i)\mathbf{h}_i, \quad (2.5)$$

dove $\boldsymbol{\tau}_i$ è il vettore ($n_i \times 1$) delle forze o coppie agenti ai giunti del manipolatore.

2.1.2 Cinematica e statica dell'oggetto manipolato

Con riferimento alla Figura 2.1, si considerino due robot che manipolano un oggetto comune. Inizialmente non si avanzerà nessuna ipotesi sulla natura dell'oggetto manipolato e sul tipo di presa da parte dei manipolatori; come casi limite si considereranno le due situazioni di oggetto rigido con presa rigida da una parte (*cooperazione in senso stretto*), e la totale assenza di oggetto dall'altra (*puro coordinamento del moto*).

Si denoti con C il centro di massa dell'oggetto manipolato (o un punto qualsiasi rispetto al quale riferire il moto del sistema) e con \mathcal{T}_c

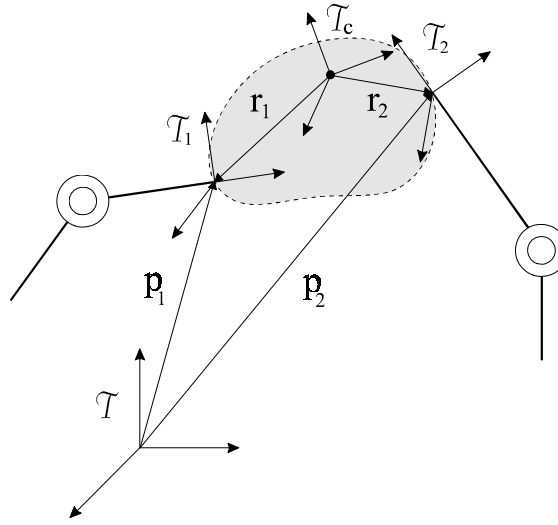


Figura 2.1: Schematizzazione della geometria di presa per un sistema di due manipolatori cooperanti.

una terna con origine in C e ad esso solidale; tale terna si intenderà solidale all'oggetto nel caso questo sia rigido. Si definisce *virtual stick* il vettore $-\mathbf{r}_i$ che inizialmente (oggetto non deformato) individua la posizione del punto C rispetto all'origine della terna \mathcal{T}_i . Sia $\mathbf{p}_{s,i}$ il vettore che individua la posizione iniziale di C (ovvero l'estremo dell' i -esimo virtual stick) rispetto alla terna base, e $\mathcal{T}_{s,i}$ la terna con origine in $\mathbf{p}_{s,i}$ inizialmente coincidente con \mathcal{T}_c . Per definizione il virtual stick è da considerarsi come un vettore rigido e rigidamente fissato all'organo terminale del manipolatore (Uchiyama e Dauchez, 1993). È importante segnalare la possibilità di esprimere la cinematica diretta di ciascun manipolatore in termini di un organo terminale virtuale individuato da $\mathbf{p}_{s,i}$ e $\mathcal{T}_{s,i}$; in tal caso si parlerà di cinematica riferita ai virtual stick.

Se l'oggetto manipolato è soggetto a deformazioni ciascun vettore $-\mathbf{r}_i$ non punterà più in C e $\mathcal{T}_{s,i}$ non coinciderà più con \mathcal{T}_c .

Indicando con $\mathbf{h}_{s,i}$ il vettore di forze generalizzate agenti in C , è

facile verificare che sussiste la seguente relazione

$$\mathbf{h}_{s,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{S}_i & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{h}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{h}_i, \quad (2.6)$$

dove \mathbf{O}_l e \mathbf{I}_l denotano rispettivamente la matrice nulla e la matrice identità di dimensioni $(l \times l)$ ed $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(\mathbf{r}_i)$; si noti che la matrice \mathbf{W}_i è sempre di pieno rango.

Applicando il principio dei lavori virtuali, si può determinare la relazione duale della (2.6)

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{S}_i \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{s,i} = \mathbf{W}_i^T \mathbf{v}_{s,i}, \quad (2.7)$$

dove $\mathbf{v}_{s,i}$ è il vettore di velocità generalizzata all'estremo del virtual stick. Si noti che la matrice \mathbf{W}_i^{-T} è concettualmente omogenea ad uno Jacobiano geometrico; se $\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ si avrà $\mathbf{W}_i = \mathbf{I}_6$; ovvero se la cinematica dei singoli manipolatori viene riferita ai virtual stick, oppure se l'oggetto manipolato si riduce ad un punto materiale, forze e velocità generalizzate in punta ai manipolatori coincideranno con quelle in punta ai due virtual stick.

2.1.3 Formulazione simmetrica

La formulazione cinetostatica proposta in (Uchiyama e Dauchez, 1993), detta anche *formulazione simmetrica*, è basata sulle relazioni statiche esistenti tra forze generalizzate agenti sull'oggetto e forze generalizzate agli organi terminali dei manipolatori; in tal modo possono essere definite le cosiddette forze *esterne* ed *interne* agenti sull'oggetto; successivamente, utilizzando il principio dei lavori virtuali, si possono ricavare le relazioni duali tra velocità generalizzate.

Si definiscono *forze esterne* quelle date dalla risultante delle forze generalizzate agenti sull'oggetto nel punto C (Uchiyama e Dauchez, 1993)

$$\mathbf{h}_{ext} = \mathbf{h}_{s,1} + \mathbf{h}_{s,2} = \mathbf{W}_s \mathbf{h}_s, \quad (2.8)$$

con $\mathbf{W}_s = [\mathbf{I}_6 \quad \mathbf{I}_6]$ e $\mathbf{h}_s = [\mathbf{h}_{s,1}^T \quad \mathbf{h}_{s,2}^T]^T$.

Dalle (2.6) e (2.8) si deduce che le forze esterne possono essere espresse direttamente in funzione delle forze generalizzate ai due organi terminali come segue

$$\mathbf{h}_{ext} = \mathbf{W}_1 \mathbf{h}_1 + \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2 = \mathbf{W} \mathbf{h}, \quad (2.9)$$

con $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2]$ e $\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T]^T$.

La matrice \mathbf{W} è detta *matrice di presa*, che trasforma le forze generalizzate ai due organi terminali in forze esterne; essa dipende dalla configurazione dei due manipolatori ed ha sempre rango 6. Anche la matrice \mathbf{W}_s è da considerarsi concettualmente analoga ad una matrice di presa.

Si noti che la relazione (2.8) definisce una trasformazione tra due spazi di dimensione diversa. Infatti, essendo \mathbf{W}_s di rango 6, sia lo spazio nullo $\mathcal{N}(\mathbf{W}_s)$ che lo spazio immagine $\mathcal{R}(\mathbf{W}_s)$ della matrice di trasformazione hanno dimensione 6; di conseguenza la soluzione inversa della (2.8) assume la forma

$$\mathbf{h}_s = \mathbf{W}_s^\dagger \mathbf{h}_{ext} + \mathbf{V}_s \mathbf{h}_{int} = \mathbf{U}_s^T \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ext} \\ \mathbf{h}_{int} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_s^T \mathbf{h}_o, \quad (2.10)$$

con \mathbf{U}_s quadrata e di rango pieno. Nella (2.10) \mathbf{W}_s^\dagger denota la *pseudoinversa a destra* di \mathbf{W}_s

$$\mathbf{W}_s^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 \\ \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

mentre \mathbf{V}_s è una matrice le cui colonne sono una base di $\mathcal{N}(\mathbf{W}_s)$; una possibile scelta per essa è rappresentata da

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 \\ -\mathbf{I}_6 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Si deduce che il secondo termine a destra della (2.10) rappresenta un vettore di forza generalizzata ai virtual stick che giace nello spazio nullo della matrice \mathbf{W}_s , e dunque non produce forze esterne. Nella (2.10) il vettore \mathbf{h}_{int} di dimensioni (6×1) rappresenta il contributo di forza generalizzata applicata all'oggetto che non contribuisce al moto dello stesso;

esso dunque rappresenta gli sforzi meccanici applicati all'oggetto (sforzi di trazione o compressione, ad esempio): le *forze interne* (Uchiyama e Dauchez, 1993).

Analogo discorso vale per la (2.9), la cui soluzione inversa è data da

$$\mathbf{h} = \mathbf{W}^\dagger \mathbf{h}_{ext} + \mathbf{V} \mathbf{h}_{int} = \mathbf{U}^\top \mathbf{h}_o, \quad (2.13)$$

con \mathbf{U} quadrata e di rango pieno.

Affinchè il primo termine in (2.13) rappresenti solo contributi di forza esterna, la pseudoinversa della matrice di presa deve essere opportunamente scelta (Walker *et al.*, 1989):

$$\mathbf{W}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{S}_1 & \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 \\ \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{S}_2 & \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Si noti che la scelta (2.14) risulta coerente con la necessità di avere soluzioni inverse invarianti rispetto a cambi di scala e di origine, e di mantenere consistenza tra unità di misura e grandezze fisiche nell'ambito delle norme prescelte (Walker *et al.*, 1989).

Le colonne della matrice \mathbf{V} costituiscono una base dello spazio nullo di \mathbf{W} ; per essa una possibile scelta è rappresentata da (Chiacchio *et al.*, 1991a)

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{S}_1 & -\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ -\mathbf{S}_2 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

La soluzione inversa della (2.8) può essere particolarizzata in modo diverso se si esprime il termine di forza giacente nel nullo della matrice di presa in termini ai virtual stick

$$\mathbf{h}_s = \mathbf{W}_s^\dagger \mathbf{h}_{ext} + (\mathbf{I}_{12} - \mathbf{W}_s^\dagger \mathbf{W}_s) \mathbf{h}_s^*, \quad (2.16)$$

dove \mathbf{h}_s^* è un vettore arbitrario di forze generalizzate ai virtual stick che viene proiettato nel nullo di \mathbf{W}_s dalla matrice $\mathbf{I}_{12} - \mathbf{W}_s^\dagger \mathbf{W}_s$. Analogò

discorso vale per la soluzione inversa della (2.9), che può essere espressa in termini di un vettore arbitrario \mathbf{h}^* di forze generalizzate agli organi terminali

$$\mathbf{h} = \mathbf{W}^\dagger \mathbf{h}_{ext} + (\mathbf{I}_{12} - \mathbf{W}^\dagger \mathbf{W}) \mathbf{h}^*. \quad (2.17)$$

Tra le matrici \mathbf{W}_s , \mathbf{V}_s e le loro pseudoinverse esistono delle relazioni notevoli che possono essere di particolare utilità; in particolare, dalla definizione stessa di \mathbf{V}_s si ha

$$\mathbf{W}_s \mathbf{V}_s = \mathbf{O}_6. \quad (2.18)$$

Un'altra proprietà notevole si ricava dalla espressione di \mathbf{U}_s^{-1} e dalla identità $\mathbf{U}_s^{-1} \mathbf{U}_s = \mathbf{I}_{12}$

$$\mathbf{W}_s^\dagger \mathbf{W}_s + \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s^\dagger = \mathbf{I}_{12}, \quad (2.19)$$

dove \mathbf{V}_s^\dagger , al contrario di \mathbf{W}_s^\dagger , è una pseudoinversa minima a sinistra di \mathbf{V}_s ($\mathbf{V}_s^\dagger \mathbf{V}_s = \mathbf{I}_6$). In modo del tutto simile si ricavano le relazioni analoghe tra \mathbf{W} e \mathbf{V}

$$\mathbf{W} \mathbf{V} = \mathbf{O}_6, \quad (2.20)$$

e le loro pseudoinverse

$$\mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} + \mathbf{V} \mathbf{V}^\dagger = \mathbf{I}_{12}, \quad (2.21)$$

che possono essere ricavate anche partendo direttamente dalle espressioni delle matrici coinvolte.

Una volta stabiliti i concetti di forze interne ed esterne si può sfruttare il principio dei lavori virtuali per ricavare le relazioni tra velocità generalizzate duali delle relazioni statiche.

Partendo dalla (2.10), si può applicare il principio dei lavori virtuali per ottenere la relazione fra i vettori di velocità \mathbf{v}_o e \mathbf{v}_s , duali di \mathbf{h}_o ed \mathbf{h}_s

$$\mathbf{v}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ext} \\ \mathbf{v}_{int} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_s \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{s,1} \\ \mathbf{v}_{s,2} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_s \mathbf{v}_s. \quad (2.22)$$

dove $\mathbf{v}_{s,i}$ è calcolabile tramite l'inversa della (2.7) e \mathbf{v}_{ext} è il vettore di velocità lineare ed angolare della terna \mathcal{T}_c solidale all'oggetto. Il vettore

\mathbf{v}_{int} può essere interpretato come la velocità relativa tra le terne fissate agli estremi dei virtual stick $\mathcal{T}_{s,i}$ (Uchiyama e Dauchez, 1993); essa è nulla se l'oggetto manipolato è rigido con presa rigida da parte dei manipolatori.

Analogamente, partendo dalla (2.13), si ricava la relazione

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{v}. \quad (2.23)$$

Le velocità \mathbf{v}_o e le forze \mathbf{h}_o definiscono lo *spazio oggetto* della formulazione simmetrica. Si noti che risalire da \mathbf{v}_o alle corrispondenti variabili integrali di posizione ed orientamento risulta molto complesso, soprattutto se si descrive l'orientamento in termini di matrici di rotazione. In (Uchiyama e Dauchez, 1993) viene proposto il ricorso a rappresentazioni minime dell'orientamento (angoli di RPY, angoli di Eulero). Tuttavia tali forme di rappresentazione dell'orientamento sono associate a legami differenziali con le velocità angolari che soffrono di problemi di singolarità in corrispondenza di particolari configurazioni.

Dalle (2.13) e (2.23), insieme con le (2.3) e (2.5), si possono ricavare anche le relazioni cinetostatiche tra le variabili dello spazio oggetto e le corrispondenti grandezze nel mondo giunti ($\boldsymbol{\tau}$ e $\dot{\mathbf{q}}$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{h} = \mathbf{J}^T \mathbf{U}^T \mathbf{h}_o = \mathbf{J}_o^T \mathbf{h}_o \\ \mathbf{v}_o = \mathbf{U}\mathbf{v} = \mathbf{U}\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{q}}, \end{cases} \quad (2.24)$$

con $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_1^T \quad \dot{\mathbf{q}}_2^T]^T$, e

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

È opportuno notare che le variabili costituenti lo spazio oggetto conservano un significato fisico chiaro solo nel caso di oggetto manipolato rigido con presa rigida; in caso contrario la formulazione simmetrica, come esposta in (Uchiyama e Dauchez, 1993), non fornisce un insieme di variabili chiaramente interpretabili ai fini della descrizione del comportamento del sistema.

2.1.4 Formulazione orientata al compito

La formulazione simmetrica ha il pregio di definire forze e velocità chiaramente interpretabili da un punto di vista fisico, ma non permette una agevole definizione delle variabili di posizione ed orientamento associate a tali grandezze.

Una strategia alternativa potrebbe essere rappresentata dalla definizione diretta delle variabili di *spazio operativo di cooperazione* in termini di posizione ed orientamento di particolari terne. In tal caso non viene garantito se le variabili differenziali (velocità lineari ed angolari) e le loro duali (forze e momenti) conservino o meno un significato fisico consistente con quello esibito dalle variabili esterne ed interne della formulazione simmetrica.

La formulazione proposta in (Chiacchio *et al.*, 1997), detta formulazione *orientata al compito*, possiede le caratteristiche indicate: essa permette all'utente di definire il compito cooperante in maniera più semplice ed intuitiva attraverso la definizione di componenti *assolute* e *relative* del moto. È importante notare che tale formulazione non presuppone necessariamente che il sistema di manipolatori sia connesso ad un oggetto da manipolare rigido, e quindi può essere adottata anche per descrivere compiti di puro coordinamento del moto o la cinematica di sistemi cooperanti con oggetto non rigido.

Si assuma ancora di riferirsi ad un sistema di due manipolatori cooperanti. In (Chiacchio *et al.*, 1997) viene introdotta una *terna assoluta* \mathcal{T}_a con origine individuata dal vettore \mathbf{p}_a rispetto alla terna base (*posizione assoluta*)

$$\mathbf{p}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2). \quad (2.26)$$

L'orientamento di \mathcal{T}_a rispetto alla terna base (*orientamento assoluto*) è espresso dalla matrice di rotazione \mathbf{R}_a

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_{r_{21}}^1 (\vartheta_{21}/2), \quad (2.27)$$

dove $\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_1^\top \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{r_{21}}^1 (\vartheta_{21})$ è la matrice che esprime l'orientamento di \mathcal{T}_2 rispetto a \mathcal{T}_1 in termini di parametri di Eulero, ovvero dell'angolo di rotazione ϑ_{21} e dell'asse di rotazione \mathbf{r}_{21}^1 . Quindi la matrice \mathbf{R}_a

descrive una rotazione della terna \mathcal{T}_2 intorno al versore \mathbf{r}_{21}^1 di un angolo pari alla metà di quello necessario per allinearla a \mathcal{T}_1 .

Si noti che \mathbf{R}_2^1 è la matrice che definisce l'orientamento di \mathcal{T}_2 rispetto alla terna \mathcal{T}_1 , ottenuta esprimendo le componenti dei versori di \mathcal{T}_2 nella terna \mathcal{T}_1 ; ciò equivale ad affermare che essa è associata ad una composizione di matrici di rotazioni in *terna corrente* (Sciavicco e Siciliano, 1996).

È chiaro che le sole variabili assolute non bastano a definire un compito per un sistema di due manipolatori; infatti, esistono infinite configurazioni del sistema cooperante che danno luogo alle stesse \mathbf{p}_a e \mathbf{R}_a , ciascuna caratterizzata da una differente configurazione di un manipolatore rispetto all'altro. Dunque, allo scopo di completare la descrizione della configurazione del sistema, è necessario prendere in considerazione anche la posizione e l'orientamento relativo dei due manipolatori. In particolare, la *posizione relativa* tra i due organi terminali viene definita mediante il vettore

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \quad (2.28)$$

mentre l'*orientamento relativo* tra i due organi terminali è rappresentato mediante la matrice di rotazione

$$\mathbf{R}_r^1 = \mathbf{R}_2^1. \quad (2.29)$$

Si noti che l'orientamento relativo è definito rispetto alla terna \mathcal{T}_1 mentre la posizione relativa è definita rispetto alla terna base. Spesso è comodo riferire anche \mathbf{p}_r alla terna \mathcal{T}_1 , in modo da rendere anche la posizione relativa indipendente dal moto assoluto del sistema; ciò può essere realizzato riferendosi al vettore posizione $\mathbf{p}_r^1 = \mathbf{p}_{21}^1$ che individua la posizione dell'origine di \mathcal{T}_2 rispetto alla terna \mathcal{T}_1 ; in tal caso si ha

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{R}_1 \mathbf{p}_r^1. \quad (2.30)$$

Le grandezze \mathbf{p}_a , \mathbf{R}_a , \mathbf{p}_r (\mathbf{p}_r^1) e \mathbf{R}_r^1 definiscono lo *spazio operativo di cooperazione* della formulazione orientata al compito.

Si noti che per definire il moto assoluto e relativo del sistema non è stato necessario assumere che gli organi terminali dei manipolatori

siano connessi ad un oggetto. D'altra parte se i due robot manipolano un oggetto, e si desidera non deformarlo durante il moto, allora sia la posizione che l'orientamento relativo vanno mantenuti costanti e pari ai loro valori corrispondenti alla situazione di oggetto non deformato. Se invece il compito prevede che l'oggetto subisca una certa deformazione, allora bisognerà assegnare una opportuna traiettoria anche per \mathbf{p}_r^1 e \mathbf{R}_r^1 .

Una volta definite le variabili di spazio operativo di cooperazione è utile derivare anche le relazioni cinematiche che legano le velocità associate a tali variabili con quelle ai due organi terminali.

Differenziando la (2.26) si ottiene la *velocità lineare assoluta* del sistema $\dot{\mathbf{p}}_a$

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2). \quad (2.31)$$

Differenziando la (2.27) e tenendo presente la (2.2) si ottiene

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_a)\mathbf{R}_a = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1)\mathbf{R}_a + \frac{1}{2}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{21})\mathbf{R}_a, \quad (2.32)$$

dove $\boldsymbol{\omega}_{21} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1$ è la velocità angolare della terna \mathcal{T}_2 rispetto a \mathcal{T}_1 espressa in terna base. Dalla (2.32) si ottiene la *velocità angolare assoluta* del sistema

$$\boldsymbol{\omega}_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2), \quad (2.33)$$

Analogamente a quanto fatto prima, differenziando la (2.28) si ottiene la *velocità lineare relativa* del sistema $\dot{\mathbf{p}}_r$

$$\dot{\mathbf{p}}_r = (\dot{\mathbf{p}}_2 - \dot{\mathbf{p}}_1). \quad (2.34)$$

Differenziando la (2.29) si ottiene

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_r^1)\mathbf{R}_r^1 = \mathbf{S}(\mathbf{R}_1^T\boldsymbol{\omega}_2)\mathbf{R}_r^1 - \mathbf{S}(\mathbf{R}_1^T\boldsymbol{\omega}_1)\mathbf{R}_r^1, \quad (2.35)$$

da cui si ricava la *velocità angolare relativa* del sistema espressa in terna base

$$\boldsymbol{\omega}_r = \mathbf{R}_1\boldsymbol{\omega}_{21}^1 = \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\omega}_2^1 - \boldsymbol{\omega}_1^1) = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1. \quad (2.36)$$

Si ha infine, compattando le relazioni precedenti, il seguente legame cinematico differenziale diretto

$$\mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I}_6 & \frac{1}{2}\mathbf{I}_6 \\ -\mathbf{I}_6 & \mathbf{I}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{v}, \quad (2.37)$$

dove $\mathbf{v}_a = [\dot{\mathbf{p}}_a^T \ \boldsymbol{\omega}_a^T]^T$ e $\mathbf{v}_r = [\dot{\mathbf{p}}_r^T \ \boldsymbol{\omega}_r^T]^T$ sono i vettori di velocità generalizzata nello spazio operativo di cooperazione. Per la dualità tra forze e velocità che discende dal principio dei lavori virtuali si ha

$$\mathbf{h} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \mathbf{h}_a \\ \mathbf{h}_r \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{h}_t, \quad (2.38)$$

dove $\mathbf{h}_a = [\mathbf{f}_a^T \ \boldsymbol{\mu}_a^T]^T$ e $\mathbf{h}_r = [\mathbf{f}_r^T \ \boldsymbol{\mu}_r^T]^T$ sono le forze generalizzate assolute e relative, duali di \mathbf{v}_a e \mathbf{v}_r rispettivamente.

Considerando la cinematica differenziale diretta dei singoli manipolatori (2.3) si ottiene

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{T} \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_t \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.39)$$

dove \mathbf{J}_t è lo Jacobiano di spazio operativo di cooperazione. Invocando il principio dei lavori virtuali si ottiene la relazione duale della (2.39) tra coppie ai giunti e forze generalizzate nello spazio operativo di cooperazione

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_t^T \mathbf{h}_t. \quad (2.40)$$

2.1.5 Relazioni tra le due formulazioni

Si consideri un sistema costituito da due manipolatori rigidamente connessi ad un oggetto rigido. In tal caso ha senso stabilire delle relazioni tra le forze e le velocità generalizzate associate alle due formulazioni cinetostatiche.

Partendo dalla inversa della relazione (2.38) e tenendo in conto la (2.13) si ha il seguente legame tra le forze generalizzate associate alle due formulazioni

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{U}^T \mathbf{h}_o = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{h}_o, \quad (2.41)$$

ed il legame duale

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{U} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{v}_t. \quad (2.42)$$

La matrice $\boldsymbol{\Phi}$ può essere calcolata sfruttando la sua definizione in (2.42)

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{U} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{\dagger T} \\ \mathbf{V}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_6 & \frac{1}{2} \mathbf{I}_6 \\ \mathbf{I}_6 & \frac{1}{2} \mathbf{I}_6 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

da cui si ottiene la seguente espressione

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \frac{1}{2}\mathbf{S}_{12} & \mathbf{O}_3 & \frac{1}{4}\mathbf{S}_{2\bar{1}} \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{S}_{2\bar{1}} & \mathbf{I}_3 & \frac{1}{2}\mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

dove le matrici \mathbf{S}_{12} e $\mathbf{S}_{2\bar{1}}$ sono definite come segue

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{S}(\mathbf{r}_2) = \mathbf{S}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \\ \mathbf{S}_{2\bar{1}} = \mathbf{S}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{S}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{cases} \quad (2.45)$$

Dalle (2.44) e (2.45), sfruttando la (2.38), si può esplicitare l'inversa della relazione (2.41) come segue

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_a \\ \boldsymbol{\mu}_{ext} = \boldsymbol{\mu}_a + \mathbf{S}_{ext}\mathbf{f} \\ \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_r \\ \boldsymbol{\mu}_{int} = \boldsymbol{\mu}_r + \frac{1}{2}\mathbf{S}_{int}\mathbf{f}, \end{cases} \quad (2.46)$$

mentre la (2.42) è equivalente alle relazioni

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_{ext} = \dot{\mathbf{p}}_a + \frac{1}{2}\mathbf{S}_{ext}\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}_{ext} = \boldsymbol{\omega}_a \\ \dot{\mathbf{p}}_{int} = \dot{\mathbf{p}}_r + \mathbf{S}_{int}\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}_{int} = \boldsymbol{\omega}_r, \end{cases} \quad (2.47)$$

con $\mathbf{S}_{ext} = [\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2]$, $\mathbf{S}_{int} = [-\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2]$, $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T \quad \mathbf{f}_2^T]^T$ e $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}_1^T \quad \boldsymbol{\omega}_2^T]^T$.

Dalle (2.46) e (2.47) si evince che le forze (le velocità angolari) coincidono sempre nelle due formulazioni, mentre i momenti (le velocità lineari) risentono dei termini di *trasporto* dall'organo terminale agli estremi virtual stick. Infatti, \mathbf{S}_{12} si annulla identicamente se e solo se $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$, ovvero se il punto scelto per descrivere il moto dell'oggetto coincide con l'origine della terna assoluta; $\mathbf{S}_{2\bar{1}}$ si annulla identicamente se e solo se $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$, ovvero se la cinematica dei due manipolatori

è riferita agli estremi dei due virtual stick, oppure se l'oggetto manipolato si riduce ad un punto materiale. Nel caso in cui $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_{2\bar{1}} = \mathbf{O}_3$ si ha $\Phi = \mathbf{I}_{12}$, e le grandezze definite dalle due formulazioni coincidono

$$\mathbf{h}_o = \mathbf{h}_t, \quad \mathbf{v}_o = \mathbf{v}_t. \quad (2.48)$$

Una importante conseguenza di queste considerazioni è l'individuazione delle variabili di posizione ed orientamento associate a \mathbf{v}_{ext} e \mathbf{v}_{int} , non definite nella formulazione originale presentata in (Uchiyama e Dauchez, 1993)

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{ext} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_{s,1} + \mathbf{p}_{s,2}) \\ \mathbf{R}_{ext} = \mathbf{R}_a \\ \mathbf{p}_{int} = (\mathbf{p}_{s,2} - \mathbf{p}_{s,1}) \\ \mathbf{R}_{int}^1 = \mathbf{R}_r. \end{cases} \quad (2.49)$$

Si può riconoscere che le matrici di rotazione associate alle velocità angolari esterne ed interne coincidono con le matrici che descrivono l'orientamento assoluto e relativo rispettivamente; le variabili di posizione, come era intuibile, coincidono con le corrispondenti variabili assolute e relative definite in termini di posizione degli estremi dei virtual stick.

2.2 Dinamica

Si consideri un sistema cooperante costituito da una coppia di manipolatori non ridondanti ($n_1 = n_2 = 6$, per fissare le idee), rigidamente connessi ad un oggetto rigido. Sia per scopi di simulazione che di progetto del controllo, è importante avere un modello dinamico del sistema cooperante che tenga conto sia dei vincoli imposti dall'esistenza della catena cinematica chiusa formata dai manipolatori e dall'oggetto, che degli accoppiamenti dinamici che caratterizzano l'interazione fra i due manipolatori.

Nel seguito i due manipolatori si intenderanno in configurazione non singolare, in modo da poter ritenere ben definite le operazioni di inversione degli Jacobiani coinvolti nella definizione dei modelli nello spazio operativo.

2.2.1 Modello dinamico nello spazio dei giunti

Il modello dinamico dei due manipolatori nello spazio dei giunti può essere scritto in forma compatta a partire dal modello dinamico nello spazio dei giunti di ciascun manipolatore

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}_i)\mathbf{h}_i, \quad (2.50)$$

con $i = 1, 2$. Nella (2.50) \mathbf{M}_i è la matrice di inerzia (quadrata, simmetrica e di rango pieno), $\mathbf{C}_i\dot{\mathbf{q}}_i$ è il vettore dei termini di Coriolis e centrifughi e \mathbf{g}_i è il vettore dei termini di gravità. Dalla (2.50) si ha

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}, \quad (2.51)$$

dove le matrici sono diagonali a blocchi ($\mathbf{M} = \text{blockdiag}\{\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\}$, ad esempio), e i vettori sono definiti giustapponendo le componenti relative ai due manipolatori ($\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1^T \quad \mathbf{g}_2^T]^T$, ad esempio).

Le equazioni dinamiche dell'oggetto sono invece ricavabili dalle equazioni di Newton-Eulero per il moto del baricentro di un corpo rigido

$$\mathbf{M}_e\dot{\mathbf{v}}_{ext} + \mathbf{C}_e\mathbf{v}_{ext} + \mathbf{g}_e = \mathbf{h}_{ext}, \quad (2.52)$$

dove \mathbf{v}_{ext} e \mathbf{h}_{ext} sono legate alle variabili dei singoli manipolatori attraverso le (2.13), (2.23) e le (2.24), \mathbf{M}_e è la matrice di inerzia dell'oggetto, $\mathbf{C}_e\mathbf{v}_{ext}$ è il vettore dei termini dipendenti dalla velocità del baricentro e \mathbf{g}_e è il vettore delle forze gravitazionali agenti nel baricentro

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} m_e\mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \boldsymbol{\Gamma}_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e\mathbf{v}_{ext} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ext})\boldsymbol{\Gamma}_e\boldsymbol{\omega}_{ext} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{g}_e = \begin{bmatrix} -m_e\mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

Nella (2.53) m_e rappresenta la massa dell'oggetto, $\boldsymbol{\Gamma}_e$ è il tensore d'inerzia dell'oggetto attorno il suo centro di massa e \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità espressa in terna base.

Naturalmente le equazioni dinamiche dell'oggetto possono scriversi in maniera formalmente analoga se il punto C non coincide con il baricentro; in tal caso le matrici definite nella (2.53) vanno opportunamente

ridefinite. A tale scopo si denoti con C' il nuovo punto dello spazio solidale all'oggetto rispetto al quale riferire il moto dell'oggetto; sia \mathbf{r}_e il vettore che individua la posizione di C rispetto a C' . In analogia alle (2.6) e (2.7), si possono definire le seguenti trasformazioni cinetostatiche

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{ext'} = \mathbf{W}_e \mathbf{h}_{ext}, \\ \mathbf{v}_{ext} = \mathbf{W}_e^T \mathbf{v}_{ext'}, \\ \dot{\mathbf{v}}_{ext} = \mathbf{W}_e^T \dot{\mathbf{v}}_{ext'} + \dot{\mathbf{W}}_e^T \mathbf{v}_{ext'}, \end{cases} \quad (2.54)$$

$\mathbf{v}_{ext'}$ e $\dot{\mathbf{v}}_{ext'}$ sono, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione generalizzate di C' , ed $\mathbf{h}_{ext'}$ rappresenta la forza esterna agente in C' . Nelle (2.54) la matrice \mathbf{W}_e è definita come

$$\mathbf{W}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}_e) & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Le equazioni dinamiche dell'oggetto riferite al nuovo punto C' sono ricavabili dalla (2.52) e (2.54)

$$\mathbf{M}_{e'} \dot{\mathbf{v}}_{ext'} + \mathbf{C}_{e'} \mathbf{v}_{ext'} + \mathbf{g}_{e'} = \mathbf{h}_{ext'}, \quad (2.56)$$

con le nuove matrici date da

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{e'} = \mathbf{W}_e \mathbf{M}_e \mathbf{W}_e^T \\ \mathbf{C}_{e'} = \mathbf{W}_e \mathbf{C}_e \mathbf{W}_e^T + \mathbf{W}_e \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{W}}_e^T \\ \mathbf{g}_{e'} = \mathbf{W}_e \mathbf{g}_e. \end{cases} \quad (2.57)$$

Da un punto di vista formale ci si può indifferentemente servire del modello (2.52) riferito al baricentro oppure del modello (2.56) riferito ad un qualsiasi altro punto dello spazio solidale all'oggetto; nel secondo caso la cinetostatica del sistema si intenderà riferita al nuovo punto oggetto.

Si noti che le equazioni dinamiche dell'oggetto manipolato possono essere interpretate come le equazioni di accoppiamento dinamico tra i due manipolatori. D'altra parte, come è facilmente intuibile, esisteranno anche delle equazioni che esprimono l'accoppiamento cinematico tra i due manipolatori. Assumendo che i due manipolatori siano connessi mediante presa rigida ad un oggetto rigido, le variabili di

giunto dei due manipolatori dovranno soddisfare dei vincoli olonomi che esprimono la non indipendenza delle configurazioni dei due manipolatori. Da un punto di vista cinematico tali vincoli possono essere espressi mediante l'annullamento delle velocità \mathbf{v}_{int} associate al moto relativo degli estremi dei due virtual stick

$$\mathbf{V}^T \mathbf{v} = \mathbf{V}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (2.58)$$

come si può facilmente dedurre dalla (2.23).

In definitiva il modello dinamico dell'intero sistema cooperante nello spazio dei giunti è dato dalle relazioni (2.51), (2.52) e (2.58) insieme con le (2.24).

Si noti che il modello ottenuto è costituito da un sistema di equazioni algebro-differenziali, o sistema DAE, a causa della presenza del vincolo algebrico (2.58). Questa particolare forma delle equazioni di modello rende necessario l'uso di strumenti di integrazione *ad hoc* per la simulazione. Per ricondurre il sistema in forma ODE, ovvero come sistema di equazioni differenziali ordinarie, si può utilizzare la procedura descritta in (Koivo ed Unseren, 1991) per l'eliminazione degli accoppiamenti dinamici e cinematici; in tal modo è possibile scrivere un modello di ordine ridotto espresso in termini delle sole variabili di giunto.

2.2.2 Modello dinamico nello spazio oggetto

Si riscriva il modello dinamico dell'oggetto (2.52) in termini dei vettori \mathbf{v}_o ed \mathbf{h}_o

$$\mathbf{M}_{e,o} \dot{\mathbf{v}}_o + \mathbf{C}_{e,o} \mathbf{v}_o + \mathbf{g}_{e,o} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{h}_o, \quad (2.59)$$

dove si è posto

$$\mathbf{M}_{e,o} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{e,o} \mathbf{v}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{e,o} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

e $\mathbf{\Sigma} = \text{blockdiag}\{\mathbf{I}_3, \mathbf{O}_3\}$ è una matrice di selezione delle sole componenti *esterne* dei vettori di forza e velocità generalizzate nello spazio oggetto.

Tenendo presente la (2.24) e la decomposizione

$$\mathbf{h}_o = \Sigma \mathbf{h}_o + (\mathbf{I}_6 - \Sigma) \mathbf{h}_o = \Sigma \mathbf{h}_o + \bar{\Sigma} \mathbf{h}_o, \quad (2.61)$$

si ottiene

$$\mathbf{M}_o \dot{\mathbf{v}}_o + \mathbf{C}_o \mathbf{v}_o + \mathbf{g}_o = \mathbf{h}_{o,c} - \bar{\Sigma} \mathbf{h}_o, \quad (2.62)$$

che rappresenta il modello dinamico del sistema manipolatori/oggetto nello spazio oggetto definito nell'ambito della formulazione simmetrica. Nella (2.62) si sono definite le seguenti quantità

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{o,c} = \mathbf{J}_o^{-T} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{M}_o = \mathbf{M}_{e,o} + \mathbf{J}_o^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}_o^{-1} \\ \mathbf{C}_o = \mathbf{C}_{e,o} + \mathbf{J}_o^{-T} \mathbf{C} \mathbf{J}_o^{-1} - \mathbf{J}_o^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}_o^{-1} \dot{\mathbf{J}}_o \mathbf{J}_o^{-1} \\ \mathbf{g}_o = \mathbf{g}_{e,o} + \mathbf{J}_o^{-T} \mathbf{g}. \end{cases} \quad (2.63)$$

I vincoli cinematici di catena chiusa si esprimeranno semplicemente come

$$\bar{\Sigma} \mathbf{v}_o = \mathbf{0}. \quad (2.64)$$

In definitiva il modello dinamico dell'intero sistema cooperante nello spazio oggetto è dato dalle relazioni (2.62) e (2.64).

2.2.3 Modello dinamico nello spazio operativo di cooperazione

Per ricavare il modello nello spazio operativo di cooperazione definito nell'ambito della formulazione orientata al compito si può procedere in modo analogo, partendo dal modello dinamico dell'oggetto espresso in termini di \mathbf{v}_t e \mathbf{h}_t ottenuto dalla (2.62) tramite le (2.41) e (2.42)

$$\mathbf{M}_{e,t} \dot{\mathbf{v}}_t + \mathbf{C}_{e,t} \mathbf{v}_t + \mathbf{g}_{e,t} = \Phi^T \Sigma \Phi^{-T} \mathbf{h}_t, \quad (2.65)$$

dove si è posto

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{e,t} = \Phi^T \mathbf{M}_o \Phi \\ \mathbf{C}_{e,t} = \Phi^T \mathbf{C}_o \Phi + \Phi^T \mathbf{M}_o \dot{\Phi} \\ \mathbf{g}_{e,t} = \Phi^T \mathbf{g}_o. \end{cases} \quad (2.66)$$

Tenendo presente le relazioni (2.39) e (2.40), e la decomposizione

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Phi}^{-T} \mathbf{h}_t + \mathbf{\Phi}^T \bar{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{\Phi}^{-T} \mathbf{h}_t \quad (2.67)$$

si ottiene

$$\mathbf{M}_t \dot{\mathbf{v}}_t + \mathbf{C}_t \mathbf{v}_t + \mathbf{g}_t = \mathbf{h}_{t,c} - \mathbf{\Phi}^T \bar{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{\Phi}^{-T} \mathbf{h}_t, \quad (2.68)$$

che rappresenta il modello dinamico del sistema manipolatori/oggetto nello spazio operativo di cooperazione. Nella (2.68) si è posto

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{t,c} = \mathbf{J}_t^{-T} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{M}_t = \mathbf{M}_{e,t} + \mathbf{J}_t^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}_t^{-1} \\ \mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{e,t} + \mathbf{J}_t^{-T} \mathbf{C} \mathbf{J}_t^{-1} - \mathbf{J}_t^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}_t^{-1} \dot{\mathbf{J}}_t \mathbf{J}_t^{-1} \\ \mathbf{g}_o = \mathbf{g}_{e,t} + \mathbf{J}_t^{-T} \mathbf{g}. \end{cases} \quad (2.69)$$

I vincoli cinematici di catena chiusa possono essere espressi come

$$\bar{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{v}_t = \mathbf{0}. \quad (2.70)$$

In definitiva il modello dinamico dell'intero sistema cooperante nello spazio operativo di cooperazione è dato dalle relazioni (2.68) e (2.70).

Capitolo 3

Controllo cinematico

In questo capitolo si descrive uno schema di *controllo cinematico* per il coordinamento del moto di un sistema di due manipolatori. Si consideri un sistema costituito da due manipolatori che debbano coordinare il proprio moto per portare a termine un compito assegnato. Nessuna ipotesi viene fatta circa la presenza o meno di un oggetto comune da manipolare; ciò che si vuole mettere in evidenza in questo capitolo è l'aspetto puramente cinematico del problema di coordinamento del moto.

Lo schema generale di controllo cinematico per un sistema robotico ha una struttura a due stadi (si veda la Fig. 3.1). Nel primo stadio si attua una *inversione cinematica* che trasforma i riferimenti posizionali assegnati nello spazio operativo nei corrispondenti riferimenti ai singoli giunti del manipolatore. Nel secondo stadio viene attuato il controllo del moto dei giunti; la strategia più semplice consiste nell'adottare anelli di regolazione decentralizzati (ad esempio di tipo PID); strategie più complesse prevedono l'uso di controllori centralizzati, basati sulla conoscenza più o meno accurata della dinamica non lineare del sistema di manipolazione.

Nel caso di sistemi costituiti da più manipolatori, i riferimenti possono essere generati nello spazio operativo di cooperazione definito dalla

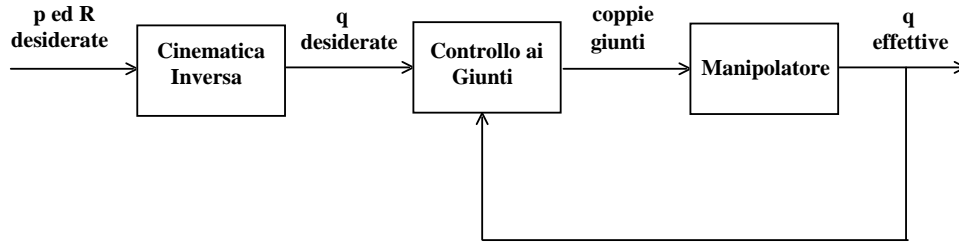


Figura 3.1: Schema generale di controllo cinematico.

formulazione orientata al compito. In tal caso l'utente può assegnare sia le componenti di moto relativo che assoluto del sistema in modo semplice ed intuitivo. Sfruttando i legami di cinematica differenziale tra velocità nello spazio operativo ed ai giunti, si può costruire un *algoritmo di inversione cinematica a ciclo chiuso* (o CLIK, Closed Loop Inverse Kinematics) per la generazione dei riferimenti ai giunti (Chiacchio *et al.*, 1996).

In presenza di gradi di mobilità del sistema cinematicamente ridondanti si può definire un compito secondario, rappresentato da una funzione delle variabili di giunto da ottimizzare localmente, in aggiunta al soddisfacimento del compito primario, rappresentato dai riferimenti di spazio operativo assegnati; il vincolo secondario può essere trattato con una tecnica di *spazio operativo allargato* con gestione della *priorità dei compiti*. Inoltre, utilizzando una *pseudoinversa a minimi quadrati smorzata* dello Jacobiano viene anche garantita la robustezza dell'algoritmo alle singolarità cinematiche.

3.1 Algoritmi di inversione cinematica

Con riferimento alla formulazione orientata al compito, il problema della inversione cinematica per un sistema di due manipolatori può essere posto come quello di calcolare le traiettorie delle variabili di giunto corrispondenti alle traiettorie di moto coordinato specificate in termini di variabili di spazio operativo assolute e relative.

La soluzione di tale problema in forma chiusa è disponibile solo per manipolatori con geometria molto semplice (manipolatori planari) e compiti di moto coordinato elementari. In alternativa è possibile ricorrere a soluzioni *algoritmiche* basate sul calcolo della cinematica differenziale inversa del sistema, e quindi degli Jacobiani associati alle variabili di spazio operativo di interesse.

Si consideri un sistema di due manipolatori non cinematicamente ridondanti ($n_1 = n_2 = 6$ nel caso spaziale, $n_1 = n_2 = 3$ nel caso planare); per fissare le idee, si faccia riferimento al caso più generale di due manipolatori spaziali.

Un algoritmo efficiente per la soluzione della cinematica inversa è dato dallo schema *a ciclo chiuso* (Siciliano, 1990) basato sul calcolo della pseudoinversa dello Jacobiano \mathbf{J}_t che compare nella (2.39)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_t^\dagger(\mathbf{q})(\mathbf{v}_{t,d} + \mathbf{K}\mathbf{e}_t), \quad (3.1)$$

dove si assume che \mathbf{J}_t sia non singolare, ovvero che nessuno dei due manipolatori sia in configurazione cinematicamente singolare; le variabili di giunto \mathbf{q} vengono successivamente ricavate via integrazione numerica. Nella (3.1) $\mathbf{v}_{t,d}$ è la velocità desiderata nello spazio del compito, \mathbf{K} è una matrice di guadagno diagonale e definita positiva, ed \mathbf{e}_t rappresenta l'errore algoritmico tra le variabili di spazio operativo desiderate ed effettive

$$\mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

L'errore *assoluto* è definito come (Chiacchio et al., 1996)

$$\mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{a,d} - \mathbf{p}_a \\ \frac{1}{2}(\mathbf{S}(\mathbf{n}_a)\mathbf{n}_{a,d} + \mathbf{S}(\mathbf{s}_a)\mathbf{s}_{a,d} + \mathbf{S}(\mathbf{a}_a)\mathbf{a}_{a,d}) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

mentre l'errore *relativo* è definito come

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{p}_{r,d}^1 - \mathbf{p}_r \\ \frac{1}{2}\mathbf{R}_1(\mathbf{S}(\mathbf{n}_r^1)\mathbf{n}_{r,d}^1 + \mathbf{S}(\mathbf{s}_r^1)\mathbf{s}_{r,d}^1 + \mathbf{S}(\mathbf{a}_r^1)\mathbf{a}_{r,d}^1) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

dove il pedice d denota le variabili desiderate ed \mathbf{n}_β , \mathbf{s}_β , \mathbf{a}_β indicano i vettori colonna della matrice di rotazione \mathbf{R}_β . Come sottolineato

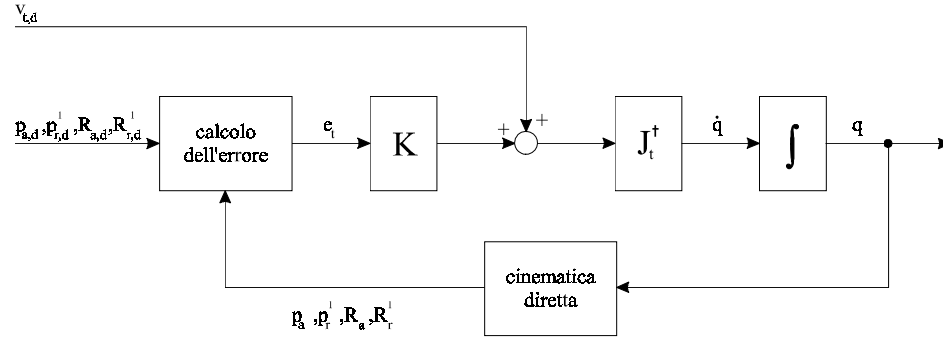


Figura 3.2: Schema dell'algoritmo di inversione cinematica a ciclo chiuso.

anche in (Luh *et al.*, 1980), la definizione degli errori di orientamento nelle (3.3) e (3.4) è equivalente alla espressione ottenibile in termini di asse ed angolo equivalente dell'orientamento descritto da $\mathbf{R}_{\beta,d}^T \mathbf{R}_\beta$.

Si noti che le variabili relative desiderate sono assegnate tutte in terna \mathcal{T}_1 , mentre gli errori sono riportati in terna base tramite la matrice di rotazione \mathbf{R}_1 ; se anche le velocità relative sono assegnate in terna locale, le loro espressioni in terna base saranno date da

$$\mathbf{v}_{r,d} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{p}}_{r,d}^1 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1) \mathbf{R}_1 \mathbf{p}_{r,d}^1 \\ \mathbf{R}_1 \boldsymbol{\omega}_{r,d}^1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Lo schema di inversione cinematica definito dalla (3.1) consente di evitare i tipici problemi di deriva degli schemi di integrazione numerica a ciclo aperto, ovvero senza retroazione dell'errore algoritmico. Si noti che tale schema rappresenta un algoritmo per ricavare le variabili di giunto corrispondenti ai riferimenti assegnati nello spazio operativo e non uno schema di controllo del moto.

Basandosi sulla definizione di \mathbf{J}_t data nella (2.39), si riconosce che la sua pseudoinversa può essere espressa come

$$\mathbf{J}_t^\dagger = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{T}^{-1}, \quad (3.6)$$

dove \mathbf{J}^\dagger può essere calcolata come

$$\mathbf{J}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^\dagger & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{J}_2^\dagger \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

che porta ad un notevole risparmio computazionale rispetto al caso in cui la \mathbf{J}_t^\dagger è calcolata direttamente.

Se il sistema cooperante possiede gradi di mobilità cinematicamente ridondanti lo Jacobiano diventa una matrice rettangolare bassa. In tal caso la soluzione algoritmica (3.1) della cinematica inversa può essere modificata in base ad una tecnica di *spazio del compito allargato* con gestione della *priorità dei compiti* (Chiacchio *et al.*, 1991b)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_t^\dagger(\mathbf{v}_{t,d} + \mathbf{K}\mathbf{e}_t) + (\mathbf{I}_{12} - \mathbf{J}_t^\dagger\mathbf{J}_t)\dot{\mathbf{q}}_0, \quad (3.8)$$

dove l'operatore $\mathbf{I}_{12} - \mathbf{J}_t^\dagger\mathbf{J}_t$ proietta il vettore arbitrario di velocità ai giunti $\dot{\mathbf{q}}_0$ (teso allo sfruttamento dei gradi di libertà ridondanti) nello spazio nullo di \mathbf{J}_t , in modo da non interferire con il compito primario rappresentato dal primo termine della (3.8). Una possibile scelta per $\dot{\mathbf{q}}_0$ è data dal gradiente di una opportuna funzione scalare delle variabili di giunto

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_c \left(\frac{\partial c(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \quad (3.9)$$

dove $c(\mathbf{q})$ rappresenta il vincolo secondario da ottimizzare localmente e k_c è una costante. Si noti che la ridondanza cinematica del sistema può essere dovuta sia alla effettiva presenza di giunti di movimentazione ridondanti ai fini dello svolgimento del compito, che al rilassamento dei vincoli su alcune delle variabili che definiscono il compito nello spazio operativo.

Nell'intorno delle *singolarità cinematiche* di ciascun manipolatore componente il sistema cooperante, lo Jacobiano \mathbf{J}_i assume un numero di condizione molto basso e la pseudoinversione di \mathbf{J}_t diviene numericamente mal condizionata; come conseguenza si possono avere elevate velocità ai giunti generate dall'algoritmo anche in presenza di velocità finite nello spazio operativo. Al limite, quando almeno uno dei due manipolatori è in singolarità, le velocità generate sono infinite. Per

incrementare la robustezza numerica dell'algoritmo si può ricorrere ad una *pseudoinversa a minimi quadrati smorzata* di ciascun Jacobiano nell'intorno di singolarità (Chiaverini *et al.*, 1993; Chiaverini *et al.*, 1994)

$$\mathbf{J}_i^* = \mathbf{J}_i^T (\mathbf{J}_i \mathbf{J}_i^T + \lambda^2 \mathbf{I}_6)^{-1} \quad (3.10)$$

al posto di \mathbf{J}_i^\dagger . Nella (3.10) $\lambda > 0$ è un fattore di smorzamento teso al raggiungimento di un compromesso tra l'accuratezza della soluzione (errori algoritmici contenuti) e la realizzabilità della soluzione (velocità ai giunti contenute); esso può essere calcolato in funzione di una stima $\hat{\sigma}_m$ del minimo valor singolare di \mathbf{J}_i

$$\lambda^2 = \begin{cases} 0 & \hat{\sigma}_m \geq \epsilon \\ \left(1 - \left(\frac{\hat{\sigma}_m}{\epsilon}\right)^2\right) \lambda_M^2 & \hat{\sigma}_m < \epsilon \end{cases} \quad (3.11)$$

dove $\epsilon > 0$ definisce l'ampiezza di una *regione singolare* nell'intorno della singolarità; il valore di λ_M può essere utilizzato dall'utente per definire le caratteristiche di smorzamento della soluzione nell'intorno della singolarità (Chiaverini *et al.*, 1993).

Nel caso che il sistema preveda la manipolazione di un oggetto rigido mediante presa rigida da parte dei due manipolatori si assegneranno dei riferimenti di posizione ed orientamento relativi ($\mathbf{p}_{r,d}^1$ e $\mathbf{R}_{r,d}^1$) costanti nel tempo e dipendenti dalla geometria dell'oggetto e della presa.

Frequentemente nella pratica si incontrano casi in cui la connessione oggetto/manipolatori non è rigida ma prevede contatti caratterizzati da strisciamento e/o rotolamento degli organi terminali rispetto alla superficie dell'oggetto manipolato; si pensi, ad esempio, alla manipolazione di oggetti mediante mani antropomorfe: in tal caso le dita svolgono il ruolo delle unità manipolanti ed i contatti sono caratterizzati dal rotolamento dei polpastrelli sulla superficie dell'oggetto manipolato. In tali casi la dimensione dello spazio del compito decresce a causa del rilassamento di alcune variabili che definiscono il compito; in generale è molto difficile individuare tali variabili di spazio operativo, tranne che in casi molto semplici.

Una soluzione semplice ed efficiente per gestire contatti non rigidi è stata proposta in (Chiacchio *et al.*, 1996) mediante l'aggiunta

di gradi di mobilità virtuali al sistema cooperante. Ad esempio, un contatto con rotolamento a tre gradi di libertà può essere schematizzato a livello cinematico mediante l'introduzione di tre giunti rotoidali virtuali all'organo terminale; come risultato si ha un organo terminale virtuale, ancora rigidamente connesso all'oggetto manipolato, caratterizzato dalla stessa posizione cartesiana dell'organo terminale effettivo e da orientamento che differisce da quello effettivo in base allo stato del contatto oggetto/organo terminale.

A questo punto il problema può essere trattato formalmente allo stesso modo presentato prima, avendo cura di tener conto delle variabili di giunto addizionali introdotte nel formulare la cinematica diretta relativa all'organo terminale virtuale. L'uscita dell'algoritmo di inversione cinematica (3.1) sarà composta sia dalle variabili associate ai giunti fisicamente presenti nel sistema che da quelle relative ai giunti virtuali: naturalmente solo le prime saranno fornite come riferimenti agli anelli di controllo ai giunti, mentre le seconde verranno realizzate attraverso la catena cinematica chiusa formata dai due manipolatori e dall'oggetto manipolato.

Si noti che, in seguito all'introduzione di contatti non rigidi, il sistema complessivo diviene cinematicamente ridondante, o aumenta il suo grado di ridondanza. Adottando la soluzione della cinematica inversa data dalla (3.8), si possono sfruttare tali gradi di libertà per il soddisfacimento di vincoli secondari.

3.2 Controllo del moto dei giunti

Una volta che il primo stadio di inversione cinematica, ad esempio realizzato come descritto nella sezione precedente, ha generato i riferimenti per le variabili di giunto, questi vengono utilizzati dagli anelli di controllo del moto che costituiscono il secondo stadio dello schema.

Il controllo del moto dei giunti può essere implementato mediante semplici anelli PID, come è pratica diffusa in ambito industriale, o da più complessi schemi di controllo centralizzato come, ad esempio, schemi a dinamica inversa, adattativi o robusti (Sciavicco e Siciliano,

1996).

In questo stadio possono anche essere adottate strategie più sofisticate per il controllo delle forze interne. Infatti, è importante sottolineare che eventuali imprecisioni nello stadio di inversione cinematica possono portare a riferimenti che violano i vincoli di catena cinematica chiusa e dunque all'insorgere di stress meccanici per l'eventuale oggetto manipolato; in tal caso si possono adottare strategie basate su un filtraggio cinetostatico dell'azione di controllo, tese alla eliminazione di tutti i contributi che generano forze interne all'oggetto. Una di queste strategie di controllo verrà descritta nel prossimo capitolo.

La scelta della strategia di controllo è dunque fortemente dipendente dal tipo di problema (cooperazione stretta o puro coordinamento del moto) e dalle risorse hardware e software disponibili per l'implementazione dell'algoritmo di controllo.

Si noti infine che l'algoritmo di inversione cinematica può essere attivato fuori linea, memorizzando i riferimenti ai giunti che vengono generati per il successivo utilizzo da parte dei controllori di giunto; nel caso che le risorse hardware e software lo permettano, è anche possibile implementare l'algoritmo in linea attivandolo ad ogni istante di campionamento del controllo.

Infine vale la pena di sottolineare che nell'ambito del controllo cinematico, i problemi di gestione della ridondanza e delle singolarità possono essere risolti direttamente a livello cinematico, dove essi sono esplicitamente definiti. D'altra parte, i problemi di natura squisitamente dinamica sono risolti direttamente a livello di controllo del moto e delle forze interne. Questa caratteristica è uno dei punti di forza del controllo cinematico rispetto alle strategie di controllo che operano direttamente nello spazio operativo (Khatib, 1987).

Capitolo 4

Regolazione nello spazio dei giunti

Si consideri un sistema di due manipolatori cooperanti connessi ad un oggetto rigido mediante presa anch'essa rigida.

Il problema del controllo per tale sistema non può essere visto come una semplice estensione del controllo per il singolo manipolatore; ciò perché la presenza dei vincoli di catena chiusa richiede un effettivo coordinamento del moto dei singoli robot costituenti il sistema di manipolazione cooperante. A tale scopo è conveniente vedere il sistema nel suo insieme ed analizzare le trasformazioni cinetostatiche tra forze e velocità a definite livello di singolo manipolatore e le loro controparti definite a livello di oggetto manipolato. Molti schemi di controllo in letteratura sono basati su tali premesse; essi assicurano sia il controllo del moto assoluto dell'oggetto che delle forze interne ad esso applicate (Tarn *et al.*, 1988; Khatib, 1995; Li *et al.*, 1989; Wen e Kreutz-Delgado, 1992; Hsu, 1993; Hu *et al.*, 1995).

Un problema comune a questa classe di schemi di controllo è che le variabili di moto definite dalle trasformazioni cinetostatiche non consentono una descrizione semplice ed intuitiva del compito cooperante, e dunque non facilitano l'assegnazione dei riferimenti per gli anelli di

controllo. La formulazione orientata al compito supera tali limiti e permette di adottare la strategia di controllo cinematico descritta nel capitolo precedente: in tale schema i riferimenti ai giunti calcolati nello stadio di inversione cinematica sono forniti agli anelli di controllo del moto ai giunti. I vantaggi principali di tale strategia risiedono nella possibilità di gestione della ridondanza e delle singolarità direttamente a livello cinematico.

Se per il controllo del moto dei giunti vengono usati degli schemi decentralizzati si potrebbe osservare l'insorgere di forze interne indesiderate all'oggetto manipolato. Queste ultime possono essere dovute a cause di varia natura: traiettorie ai giunti generate dall'algoritmo di inversione cinematica che violano i vincoli di catena cinematica chiusa (perché non consistenti con la geometria della presa, ad esempio), effetti dinamici non compensati, errori di inseguimento ai giunti. Per ridurre gli effetti delle ultime due cause si potrebbe ricorrere a schemi con compensazione dinamica; questi ultimi però sono usualmente caratterizzati da un carico computazionale elevato e spesso non tengono conto della dinamica (talvolta conosciuta solo approssivamente) dell'oggetto manipolato.

Per ridurre l'insorgere di forze interne e conservare la semplicità degli schemi di controllo senza compensazione dinamica è stata proposta una strategia di controllo basata su un regolatore di tipo PD con compensazione di gravità, a cui viene aggiunto un *filtraggio cinetostatico* dell'azione di controllo (Chiacchio e Chiaverini, 1996). Tale strategia permette di ridurre, o al limite di annullare completamente, le forze interne a regime, anche se i riferimenti ai giunti non possono essere raggiunti a causa dei vincoli di catena chiusa; per incrementare le prestazioni del regolatore può essere introdotta anche un'azione di controllo diretta delle forze interne. La stabilità della legge di controllo con filtraggio cinetostatico è stata analizzata in (Caccavale *et al.*, 1996e); in (Caccavale *et al.*, 1997a) l'analisi è stata estesa al caso di compensazione imperfetta dei contributi di gravità dell'oggetto manipolato e/o dei manipolatori.

Nel seguito tale approccio viene generalizzato: l'azione di filtraggio

viene pesata con un parametro che rappresenta il grado di attenuazione delle forze interne a regime. Le sue proprietà vengono analizzate in termini di convergenza dell'errore e di robustezza rispetto ad errori di modellazione dei termini di gravità.

4.1 Regolatore PD con compensazione di gravità

Si consideri un sistema di due manipolatori spaziali ($n_1 = n_2 = 6$) non ridondanti che cooperano nello svolgimento di un compito di manipolazione di un oggetto rigido con presa rigida.

Uno schema di controllo ai giunti molto semplice e ben noto nell'ambito della robotica è costituito dal regolatore PD con compensazione di gravità (Wen e Kreutz-Delgado, 1992); la sua espressione nel caso di sistemi cooperanti è la seguente

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g} + \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{g}_e, \quad (4.1)$$

dove $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ rappresenta l'errore nello spazio dei giunti, e \mathbf{K}_p e \mathbf{K}_d sono matrici di guadagno definite positive. Nella (4.1) si assume implicitamente che lo Jacobiano \mathbf{J} sia una matrice quadrata e di pieno rango, ovvero che il sistema cooperante sia non ridondante e non incorra in singolarità cinematiche.

Per un assegnato vettore di riferimenti ai giunti \mathbf{q}_d , l'equilibrio del sistema (2.51), (2.52), (2.58) e (2.24) sotto l'azione della legge di controllo (4.1) soddisfa l'equazione

$$\mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss} - \mathbf{J}^T \mathbf{V} \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{0}, \quad (4.2)$$

dove $\tilde{\mathbf{q}}_{ss}$ e $\mathbf{h}_{int,ss}$ sono rispettivamente l'errore nello spazio dei giunti e la forza interna in condizioni di regime statico. La (4.2) rivela che a regime si generano forze interne se si è in presenza di errori ai giunti; tali errori possono essere indotti da riferimenti non consistenti con i vincoli di catena chiusa imposti dal sistema; in dettaglio, sfruttando la proprietà (2.21), la (4.2) può essere riscritta come

$$\mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss} - \mathbf{V} (\mathbf{h}_{int,ss} - \mathbf{V}^\dagger \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss}) = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Si osservi che \mathbf{V} ricopre lo spazio nullo della matrice di presa \mathbf{W} , mentre \mathbf{W}^\dagger ricopre lo spazio immagine di \mathbf{W}^\top ; dunque, i due termini a sinistra della eguaglianza (4.3) giacciono in sottospazi ortogonali, e quindi sono necessariamente entrambi nulli. Inoltre, essendo \mathbf{W}^\dagger e \mathbf{V} rettangolari alte e di pieno rango, la (4.3) diventa

$$\begin{cases} \mathbf{W}\mathbf{J}^{-\top}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{J}^{-\top}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss}, \end{cases} \quad (4.4)$$

da cui si evince che, nel caso di errori a regime non nulli, solamente le componenti dell'azione proporzionale lungo le direzioni di forza interna provocano il permanere di sforzi interni regime.

Per limitare, o evitare del tutto, l'insorgere di sforzi meccanici applicati all'oggetto si può introdurre un filtraggio cinetostatico dell'azione proporzionale $\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}$, teso alla riduzione, o alla eliminazione completa, dei contributi che compaiono nella seconda delle (4.4). Infatti, considerando l'azione proporzionale come un coppia elastica ai giunti, essa può essere dapprima trasformata nella corrispondente forza generalizzata agli organi terminali tramite $\mathbf{J}^{-\top}$, e successivamente in un vettore di forze esterne tramite \mathbf{W} . In tal modo la parte dell'azione proporzionale che contribuisce a generare forze interne viene eliminata completamente. Per tornare ad coppie agenti nello spazio dei giunti, immagini delle forze esterne richieste per attuare il moto desiderato, si esegue la trasformazione inversa mediante \mathbf{W}^\dagger e \mathbf{J}^\top . Se l'obiettivo è la riduzione delle forze interne piuttosto che l'eliminazione completa, si può aggiungere un termine che trasforma, attraverso la matrice $\mathbf{V}^\dagger\mathbf{J}^{-\top}$, solamente una frazione dell'azione proporzionale nello spazio delle forze interne, per poi tornare, tramite la trasformazione $\mathbf{J}^\top\mathbf{V}$, a coppie nello spazio dei giunti. In definitiva, la legge di controllo si modifica in

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^\top(\mathbf{W}^\dagger\mathbf{W} + \alpha\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger)\mathbf{J}^{-\top}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} + \mathbf{J}^\top\mathbf{W}^\dagger\mathbf{g}_e, \quad (4.5)$$

in cui si assume ancora \mathbf{J} quadrata e di pieno rango ed $\alpha \in [0, 1]$ è uno scalare. Nella (4.5), la costante α svolge il ruolo di attenuazione delle componenti di $\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss}$ lungo le direzioni di forza interna. In particolare, scegliendo $\alpha = 1$ si ottiene la legge di controllo (4.1). Per $\alpha = 0$ le

componenti dell'azione proporzionale $\mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss}$ lungo le direzioni di forza interna a regime vengono completamente eliminate; in tal caso si ottiene la legge di controllo con *filtraggio cinetostatico* propriamente detto. I risultati sperimentali indicano chiaramente che l'utilizzo della legge (4.5) con α non nullo diviene necessario nel caso di oggetto non rigido. Infatti il filtraggio cinetostatico completo cancella tutti i contributi dell'azione di controllo a ciclo chiuso lungo le direzioni di forza interna; ciò implica che il moto lungo tali direzioni viene governato dal vincolo di rigidità dell'oggetto manipolato. Nel caso di oggetto caratterizzato da elevata cedevolezza tale vincolo viene meno, e lungo le direzioni di forza interna possono osservarsi fenomeni di deriva o instabilità.

Si noti che, poiché si è interessati alle sole prestazioni a regime del sistema a ciclo chiuso, l'unico termine filtrato cinetostaticamente è quello proporzionale all'errore ai giunti in quanto è l'unico presente anche in condizioni di regime statico.

L'equilibrio del sistema (2.51), (2.52), (2.58) e (2.24) sotto l'azione della legge di controllo (4.5) soddisfa l'equazione

$$\mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss} - \mathbf{J}^T \mathbf{V} (\mathbf{h}_{int,ss} - \alpha \mathbf{V}^\dagger \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss}) = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

Poiché \mathbf{J}^T è di pieno rango, può essere posto a fattor comune e semplificato

$$\mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss} - \mathbf{V} (\mathbf{h}_{int,ss} - \alpha \mathbf{V}^\dagger \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss}) = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Si osservi che \mathbf{V} ricopre lo spazio nullo della matrice di presa \mathbf{W} , mentre \mathbf{W}^\dagger ricopre lo spazio immagine di \mathbf{W}^T ; dunque, i due termini a sinistra della eguaglianza (4.7), giacciono in sottospazi ortogonali, e quindi sono necessariamente entrambi nulli. Inoltre, essendo \mathbf{W}^\dagger e \mathbf{V} matrici rettangolari alte di pieno rango, la (4.7) diventa

$$\begin{cases} \mathbf{W} \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \alpha \mathbf{V}^\dagger \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}_{ss}. \end{cases} \quad (4.8)$$

La prima delle due eguaglianze nella (4.8) implica che le componenti dell'azione proporzionale giacenti nel sottospazio delle forze esterne si annullano a regime; la seconda relazione garantisce che le forze interne

a regime si riducono proprio del fattore α . In particolare, per $\alpha = 0$ le forze interne a regime si annullano. Dunque, la legge di controllo con filtraggio cinetostatico è in grado di ridurre, o eliminare del tutto, le forze interne a regime, anche nel caso in cui i riferimenti di giunto imposti violano i vincoli di catena cinematica chiusa. Si noti che l'azione di filtraggio non influisce sugli errori a regime dovuti a disturbi esterni, e dunque l'azione di controllo (4.5) è in grado di contrastarne pienamente gli effetti sul ciclo chiuso.

Le due condizioni nella (4.8) possono essere interpretate come un insieme di vincoli sulle variabili $\tilde{\mathbf{q}}_{ss}$. La non linearità di tali equazioni non permette di trarre conclusioni rigorose circa la loro soluzione. Sulla base di considerazioni fisiche si può avanzare l'ipotesi che, in generale, esista una molteplicità di soluzioni corrispondenti a differenti configurazioni del sistema. Per fare un esempio, in un sistema cooperante costituito da due manipolatori planari a tre gradi di mobilità rotazionali, ciascun manipolatore può assumere una duplice configurazione dei giunti (gomito alto/gomito basso) per un'assegnata configurazione di spazio operativo; ciò significa che per l'intero sistema saranno possibili diverse configurazioni di equilibrio corrispondenti alle diverse configurazioni di gomito di ciascun manipolatore.

4.2 Analisi di stabilità

I teoremi di La Salle (o teoremi dell'insieme invariante), riportati in Appendice sia nella versione *globale* che *locale* (Slotine e Li, 1991; Khalil, 1992), possono essere utilizzati per analizzare la stabilità delle soluzioni d'equilibrio delle (4.8).

Si consideri la funzione scalare continua con le sue derivate parziali

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{ext}^T \mathbf{M}_e \mathbf{v}_{ext} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}, \quad (4.9)$$

dove $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ appartiene al sottospazio $\Phi \subset \mathbb{R}^{24}$ costituito dagli errori di inseguimento e dalle velocità ai giunti che soddisfano i vincoli di catena chiusa. Si noti che V è radialmente illimitata.

Nell'ipotesi di riferimenti ai giunti \mathbf{q}_d costanti nel tempo (ovvero ci si limita a considerare problemi di regolazione), e sfruttando il modello dinamico dei manipolatori e dell'oggetto, si ha

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}}^T(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{h} - \mathbf{g}) + \mathbf{v}_{ext}^T(\mathbf{h}_{ext} - \mathbf{g}_e) - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}, \quad (4.10)$$

dove si sono sfruttate le proprietà strutturali del modello dinamico $\dot{\mathbf{q}}^T(\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} = 0$ e $\mathbf{v}_{ext}^T(\dot{\mathbf{M}}_e - 2\mathbf{C}_e)\mathbf{v}_{ext} = 0$. Esprimendo \mathbf{v}_{ext} come nella (2.23) e tenendo conto della (2.13), si ha

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}}^T(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{V} \mathbf{h}_{int} - \mathbf{g} - \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{g}_e - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}). \quad (4.11)$$

Tenendo presente i vincoli di catena chiusa (2.58) e sostituendo la legge di controllo (4.5) nella (4.11), si ottiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}^T (\mathbf{I}_{12} - \mathbf{W}^\dagger \mathbf{W}) \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}. \quad (4.12)$$

Si noti che anche il termine che rappresenta la proiezione dell'azione proporzionale nello spazio delle forze interne si annulla in virtù del vincolo (2.58).

Si può riconoscere facilmente che il secondo termine a destra della (4.12) si annulla in forza dei vincoli di catena chiusa; infatti, la quantità data da $(\mathbf{I}_{12} - \mathbf{W}^\dagger \mathbf{W}) \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$ è una velocità generalizzata agli organi terminali corrispondente, attraverso la (2.23), a sole velocità interne. Dunque, la (4.12) diviene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \quad (4.13)$$

che risulta essere semidefinita negativa in tutto l'insieme Φ .

L'insieme R di tutti i punti $\mathbf{x} \in \Phi$ tali che $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ è dato da

$$R = \{\mathbf{x} \in \Phi : \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\}. \quad (4.14)$$

Dall'analisi dell'equilibrio condotta nella sezione precedente, si conclude che il più grande l'insieme invariante contenuto in R è dato da

$$M = \{\mathbf{x} \in R : \tilde{\mathbf{q}}_{ss} \text{ soddisfa la (4.8)}\}. \quad (4.15)$$

Dunque, il teorema dell'insieme invariante nella sua versione globale assicura che tutte le traiettorie del sistema a ciclo chiuso convergono asintoticamente all'insieme invariante M , qualunque sia la condizione iniziale da cui partono.

Si noti che, in accordo alle ipotesi fatte su \mathbf{J} , tale risultato è valido per ogni perturbazione tale da non generare traiettorie che coinvolgano il passaggio per le singolarità cinematiche del sistema.

Se l'insieme M contiene l'origine dello spazio di stato, ovvero i riferimenti assegnati possono essere raggiunti senza violare i vincoli di catena chiusa, è opportuno studiare il dominio di attrattività di $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Poichè la funzione $V(\mathbf{x})$ adottata è quadratica, è sempre possibile trovare un numero positivo ℓ ed una regione limitata $\Phi_\ell \subset \Phi$ tale che si abbia $\Phi_\ell \cap M = \{\mathbf{0}\}$ e

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) < \ell \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Phi_\ell. \quad (4.16)$$

Applicando il teorema dell'insieme invariante nella sua versione locale si può concludere che l'insieme Φ_ℓ è un dominio di attrattività per il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Quando l'insieme M non contiene l'origine, i riferimenti ai giunti assegnati violano i vincoli di catena chiusa. In questo caso ci si limita ad analizzare la stabilità in senso locale degli elementi a norma minima presenti in M ; a tale scopo si può seguire la stessa procedura adottata per analizzare la stabilità locale dell'origine.

4.3 Compensazione non accurata dei termini gravitazionali

In molti casi pratici la massa dell'oggetto manipolato non è conosciuta in modo accurato; in tal caso si ha a disposizione solo una stima nominale del termine di gravità $\hat{\mathbf{g}}_e$ e la legge di controllo (4.5) diviene

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} + \alpha \mathbf{V} \mathbf{V}^\dagger) \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g} + \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \hat{\mathbf{g}}_e. \quad (4.17)$$

I punti di equilibrio del sistema sotto la legge di controllo (4.17) soddisferanno le equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{W}\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss} = \mathbf{g}_e - \hat{\mathbf{g}}_e \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \alpha\mathbf{V}^\dagger\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Si deduce che la compensazione inaccurata della gravità dell'oggetto porta ad un differente insieme di configurazioni d'equilibrio rispetto a quelle ottenute dalle (4.8). Tuttavia, le forze interne a regime sono ancora nulle, nel caso $\alpha = 0$, o ridotte di una frazione α , nel caso generale.

La stabilità dei punti d'equilibrio dati dalla (4.18) può essere analizzata secondo le linee guida date in (Tomei, 1991). Si considerino le due funzioni potenziale $U_{g,e}(\mathbf{q})$ e $\hat{U}_{g,e}(\mathbf{q})$ tali che

$$\frac{\partial U_{g,e}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{J}^\text{T}\mathbf{W}^\dagger\mathbf{g}_e, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \hat{U}_{g,e}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{J}^\text{T}\mathbf{W}^\dagger\hat{\mathbf{g}}_e, \quad (4.20)$$

entrambe limitate per ogni \mathbf{q} .

Si consideri la seguente funzione scalare continua con le sue derivate parziali, ottenuta estendendo la funzione V nella (4.9)

$$\begin{aligned} V_{g,e}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\text{T}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{ext}^\text{T}\mathbf{M}_e\mathbf{v}_{ext} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^\text{T}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} \\ & + U_{g,e}(\mathbf{q}) - \hat{U}_{g,e}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

con \mathbf{x} appartenente al sottospazio Φ costituito dagli errori e dalle velocità ai giunti che soddisfano i vincoli di catena chiusa. La funzione $V_{g,e}$ è radialmente illimitata grazie alla limitatezza delle funzioni che esprimono i due potenziali gravitazionali.

Tenendo conto delle (4.19), (4.20) e ipotizzando riferimenti costanti, si ottiene ancora

$$\dot{V}_{g,e}(\mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{q}}^\text{T}\mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}, \quad (4.22)$$

che è semidefinita negativa su tutto Φ . Dunque il teorema dell'insieme invariante assicura la convergenza asintotica delle traiettorie del sistema all'insieme invariante

$$M_{g,e} = \{\mathbf{x} \in R : \tilde{\mathbf{q}}_{ss} \text{ soddisfa le (4.18)}\}. \quad (4.23)$$

Nel caso di compensazione imperfetta dei termini di gravità dei manipolatori, un ragionamento analogo al precedente porta a concludere la stabilità asintotica dell'equilibrio

$$\begin{cases} \mathbf{W}\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss} = \mathbf{W}\mathbf{J}^{-\text{T}}(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}) \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{J}^{-\text{T}}[(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}) + \alpha\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss}] \end{cases} \quad (4.24)$$

dove $\hat{\mathbf{g}}$ denota una stima di \mathbf{g} . Va sottolineato che in tal caso all'equilibrio non si ottengono forze interne nulle neanche nel caso $\alpha = 0$, e la loro ampiezza dipende dal grado di accuratezza della compensazione dei termini gravitazionali.

4.4 Regolazione delle forze interne

La legge di controllo (4.5) è in grado di assicurare forze interne nulle a regime. Se si desidera imporre un riferimento di forza interna, o incrementare la capacità del controllore di regolare le forze interne a zero, bisogna ricorrere ad una retroazione diretta delle forze interne.

Per un sistema robotico, l'unica misura di forza disponibile proviene in genere da sensori di forza agli organi terminali dei due manipolatori che forniscono una misura di \mathbf{h} . Per risalire alle forze interne bisognerà ricorrere all'inversa della (2.13)

$$\mathbf{h}_{int} = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{h}. \quad (4.25)$$

A questo punto la legge di controllo (4.5) si modifica in

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{J}^\text{T}(\mathbf{W}^\dagger\mathbf{W} + \alpha\mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger)\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} + \mathbf{J}^\text{T}\mathbf{W}^\dagger\mathbf{g}_e \\ & + \mathbf{J}^\text{T}\mathbf{V}[\mathbf{h}_{int,d} + \mathbf{K}_f(\mathbf{h}_{int,d} - \mathbf{h}_{int})], \end{aligned} \quad (4.26)$$

dove \mathbf{K}_f è una matrice di guadagno definita positiva e $\mathbf{h}_{int,d}$ è il riferimento di forza interna desiderata.

Per un riferimento costante assegnato \mathbf{q}_d , l'equilibrio del sistema sotto la legge di controllo (4.26) soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}^\text{T}\mathbf{W}^\dagger\mathbf{W}\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss} \\ & + \mathbf{J}^\text{T}\mathbf{V}[(\mathbf{I}_6 + \mathbf{K}_f)(\mathbf{h}_{int,d} - \mathbf{h}_{int,ss}) + \alpha\mathbf{V}^\dagger\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss}] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

che si può riscrivere come

$$\begin{cases} \mathbf{W}\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{h}_{int,d} + \alpha(\mathbf{I}_6 + \mathbf{K}_f)^{-1}\mathbf{V}^\dagger\mathbf{J}^{-\text{T}}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}}_{ss}, \end{cases} \quad (4.28)$$

da cui si deduce che, nel caso $\alpha = 0$ (filtraggio cinetostatico dell'azione proporzionale propriamente detto), il riferimento di forza è raggiunto a regime; se α è diverso da zero, l'effetto delle componenti interne dell'azione proporzionale a regime viene ulteriormente ridotto di un fattore $(\mathbf{I}_6 + \mathbf{K}_f)^{-1}$.

Per analizzare la stabilità dell'equilibrio (4.28) si può partire dalla stessa funzione scalare $V(\mathbf{x})$ definita nella (4.9). La derivata rispetto al tempo di V lungo le traiettorie del sistema ha la stessa espressione (4.13); infatti, sostituendo la legge di controllo (4.26) nella espressione di \dot{V} , si riconosce che i termini che forniscono l'azione di controllo in forza non danno contributo a causa ai vincoli di catena cinematica chiusa (2.58).

Le stesse argomentazioni usate precedentemente portano a stabilire la convergenza asintotica in senso globale delle traiettorie del sistema a ciclo chiuso all'insieme

$$M' = \{\mathbf{x} \in R : \tilde{\mathbf{q}}_{ss} \text{ soddisfa le (4.28)}\}, \quad (4.29)$$

e la stabilità asintotica locale degli elementi a norma minima in M' .

Infine, la stessa procedura seguita al paragrafo precedente può essere utilizzata per analizzare le proprietà di convergenza del sistema a ciclo chiuso nel caso di compensazione imperfetta dei termini di gravità.

Capitolo 5

Regolazione nello spazio operativo

Nel capitolo precedente si è descritto un regolatore per sistemi di manipolatori cooperanti in senso stretto, progettato nello spazio dei giunti. In tal caso la logica sottostante è quella del controllo cinematico, che demanda allo stadio di inversione cinematica il compito di tradurre le specifiche di moto dallo spazio operativo allo spazio dei giunti.

Una strategia alternativa di progettazione del controllo per sistemi robotici consiste nel sintetizzare la legge di controllo direttamente nello spazio operativo (Khatib, 1987). Nel caso dei manipolatori cooperanti, ciò implica che l'anello di retroazione debba elaborare riferimenti e misure di posizione ed orientamento nello spazio operativo di cooperazione o nello spazio oggetto. Tuttavia, l'azione di controllo va comunque espressa in termini di coppie ai giunti; ciò implica che nell'anello di controllo dovrà comunque esistere una operazione rappresentativa di una inversione cinematica.

Basandosi su tali premesse è stato proposto in (Caccavale *et al.*, 1996d), e successivamente perfezionato in (Caccavale *et al.*, 1997a) un regolatore PD con compensazione di gravità progettato direttamente nello spazio operativo di cooperazione. Anche in questo caso viene uti-

lizzato un filtraggio cinetostatico per ridurre le forze interne a regime. Seguendo l'approccio descritto in (Yuan, 1988), la legge di controllo proposta in (Caccavale *et al.*, 1997b) utilizza una espressione degli errori di orientamento in termini di quaternioni; in tal modo si ottiene una espressione fisicamente più significativa degli errori di inseguimento rispetto ad altre forme di rappresentazione dell'orientamento (angoli di Eulero o di RPY).

Nel seguito tale approccio viene generalizzato: l'azione di filtraggio viene parametrizzata rispetto ad una costante di attenuazione delle componenti di forza interna a regime. Le proprietà del regolatore vengono analizzate in termini di convergenza dell'errore di inseguimento e di robustezza rispetto ad errori di compensazione dei termini gravità.

Il regolatore proposto assicura la riduzione delle forze interne a regime anche se i riferimenti di spazio operativo non possono essere raggiunti a causa dei vincoli di catena chiusa; per incrementare le prestazioni dello schema si può introdurre, anche in questo caso, un'azione di controllo diretta delle forze interne.

5.1 Rappresentazione dell'orientamento

Come specificato dalle (2.27) e (2.29), l'orientamento assoluto e relativo per un sistema di due manipolatori è rappresentabile mediante le due matrici di rotazione \mathbf{R}_a , che rappresenta l'orientamento della terna assoluta rispetto alla terna base, ed \mathbf{R}_r^1 , che rappresenta l'orientamento della terna \mathcal{T}_2 rispetto alla terna \mathcal{T}_1 .

Una rappresentazione alternativa per l'orientamento di una terna \mathcal{T}_0 rispetto ad una terna base \mathcal{T} è fornita dal quaternion unitario (Yuan, 1988)

$$\mathcal{Q}_0 = \{ \eta_0, \boldsymbol{\epsilon}_0 \}, \quad (5.1)$$

dove le componenti scalare η_0 e vettoriale $\boldsymbol{\epsilon}_0$ del quaternion

$$\begin{cases} \eta_0 = \cos(\vartheta_0/2) \\ \boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathbf{r}_0 \sin(\vartheta_0/2). \end{cases} \quad (5.2)$$

Le due quantità \mathbf{r}_0 e ϑ_0 sono usualmente indicate come *parametri di Eulero*; essi definiscono la rotazione richiesta a \mathcal{T}_0 per sovrapporsi a \mathcal{T} , come rotazione intorno al versore \mathbf{r}_0 di un angolo pari a ϑ_0 . La componente vettoriale del quaternion $\boldsymbol{\epsilon}_0$ ha le stesse coordinate nelle due terne. Si noti infine che il quaternion $\{\eta_0, -\boldsymbol{\epsilon}_0\}$ rappresenta l'orientamento di \mathcal{T} rispetto a \mathcal{T}_0 .

Un algoritmo efficiente e privo di singolarità per calcolare il quaternion \mathcal{Q}_0 a partire dalla matrice di rotazione \mathbf{R}_0 corrispondente è descritto in (Shepperd, 1978).

L'evoluzione temporale delle componenti di \mathcal{Q}_0 è legata alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0$ della terna corrispondente attraverso la regola di propagazione

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_0^T \\ \boldsymbol{\omega}_0 & \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \boldsymbol{\epsilon}_0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

L'orientamento della terna assoluta \mathcal{T}_a rispetto alla terna base può dunque essere espresso in termini del quaternion

$$\mathcal{Q}_a = \{ \eta_a, \boldsymbol{\epsilon}_a \}, \quad (5.4)$$

ricavabile da \mathbf{R}_a tramite l'algoritmo citato in precedenza. La derivata temporale delle componenti di \mathcal{Q}_a è legata ad $\boldsymbol{\omega}_a$ tramite la regola di propagazione (5.3)

$$\begin{cases} \dot{\eta}_a = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\epsilon}_a \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_a = \frac{1}{2}\eta_a \boldsymbol{\omega}_a + \frac{1}{2}\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_a)\boldsymbol{\epsilon}_a. \end{cases} \quad (5.5)$$

Più delicato è il problema di rappresentazione dell'orientamento relativo; infatti la matrice di \mathbf{R}_r^1 rappresenta una differenza di orientamento tra due terne, piuttosto che che l'orientamento di una terna. L'orientamento differenza tra due terne \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , espresso dalla matrice di rotazione $\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2$, è calcolabile in termini di quaternioni come segue

$$\mathcal{Q}_r^1 = \{ \eta_r, \boldsymbol{\epsilon}_r^1 \}. \quad (5.6)$$

con

$$\begin{cases} \eta_r = \cos(\vartheta_{21}/2) \\ \boldsymbol{\epsilon}_r^1 = \mathbf{r}_{21}^1 \sin(\vartheta_{21}/2), \end{cases} \quad (5.7)$$

Le quantità \mathbf{r}_{21}^1 e ϑ_{21} sono rispettivamente l'asse e l'angolo equivalente che realizzano la rotazione necessaria per allineare \mathcal{T}_2 con \mathcal{T}_1 . In alternativa all'espressione (5.7) si può utilizzare l'espressione suggerita in (Yuan,1988).

Si noti che la componente vettoriale di \mathcal{Q}_r^1 è espressa in terna \mathcal{T}_1 ; per riportare tale rappresentazione in terna base si può effettuare la trasformazione

$$\boldsymbol{\epsilon}_r = \mathbf{R}_1 \boldsymbol{\epsilon}_r^1. \quad (5.8)$$

La regola di propagazione applicata a \mathcal{Q}_r^1 fornisce (Wen e Kreutz-Delgado, 1991)

$$\begin{cases} \dot{\eta}_r = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r^{1T} \boldsymbol{\epsilon}_r^1 = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_r^T \boldsymbol{\epsilon}_r \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_r^1 = \frac{1}{2} \eta_r \boldsymbol{\omega}_r^1 + \frac{1}{2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_r^1) \boldsymbol{\epsilon}_r^1 = \frac{1}{2} \eta_r \mathbf{R}_1^T \boldsymbol{\omega}_r + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1^T \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_r) \boldsymbol{\epsilon}_r. \end{cases} \quad (5.9)$$

È infine importante richiamare l'attenzione su alcuni vantaggi derivanti dall'adozione della rappresentazione dell'orientamento in termini di quaternioni:

1. la trasformazione che lega un quaternioni con la corrispondente matrice di rotazione è priva di singolarità; ciò non risulta vero per altre forme di rappresentazione dell'orientamento (angoli di Eulero o di RPY);
2. la derivata temporale di un quaternioni è direttamente legata alla velocità angolare della terna corrispondente tramite la regola di propagazione; ciò permette di sintetizzare ed analizzare in maniera più semplice e diretta leggi di controllo contenenti termini legati alle velocità angolari (ad esempio termini di smorzamento).

5.2 Regolatore PD con compensazione di gravità

Si consideri un sistema di due manipolatori spaziali non ridondanti ($n_1 = n_2 = 6$) che manipolano un oggetto rigido con presa rigida.

Uno schema semplice e ben noto nell'ambito del controllo nello spazio operativo dei sistemi robotici è dato dal regolatore PD con compensazione di gravità

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_t^T (\mathbf{K}_p \mathbf{e}_t - \mathbf{K}_d \mathbf{v}_t) + \mathbf{g} + \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{g}_e, \quad (5.10)$$

progettato direttamente nello spazio operativo di cooperazione definito dalla formulazione orientata al compito. Nella (5.10) \mathbf{K}_p e \mathbf{K}_d sono matrici di guadagno definite positive; in particolare, \mathbf{K}_p ha la seguente struttura

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p,a} & \mathbf{O}_6 \\ \mathbf{O}_6 & \mathbf{K}_{p,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p,a} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & k_{o,a} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & k_{p,r} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & k_{o,r} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Si noti che tale scelta di \mathbf{K}_p non rappresenta una vera limitazione nel progetto dell'azione di controllo. Infatti, ogni vettore di errore su variabili di spazio operativo omogenee viene pesato da un guadagno differente dagli altri, e dunque una certa libertà di scelta dei guadagni viene lasciata al progettista. D'altra parte, scegliere guadagni differenti lungo le componenti di uno stesso vettore di errore porterebbe ad una rotazione della variabile d'errore.

Il vettore \mathbf{e}_t rappresenta l'errore nello spazio operativo di cooperazione ed è calcolato come suggerito in (Yuan, 1988)

$$\mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

dove l'errore assoluto è dato da

$$\mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{a,p} \\ \mathbf{e}_{a,o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{a,d} - \mathbf{p}_a \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_a \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

mentre l'errore relativo è dato da

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{r,p} \\ \mathbf{e}_{r,o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{r,d} - \mathbf{p}_r \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_r \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

in cui il pedice d denota i valori desiderati. Nella (5.14) si è posto $\mathbf{p}_{r,d} = \mathbf{R}_1 \mathbf{p}_{r,d}^1$, ovvero il vettore di posizione relativa desiderato viene

assegnato in terna locale, in modo da semplificare la pianificazione del moto relativo, e successivamente riportato in terna base ai fini del calcolo dell'errore.

I due termini di errore di orientamento $\tilde{\epsilon}_a$ e $\tilde{\epsilon}_r$ derivano dalla descrizione in termini di quaternioni dell'orientamento espresso dalle matrici \mathbf{R}_a ed \mathbf{R}_r^1 e dalle loro controparti desiderate. In dettaglio, i quaternioni \mathcal{Q}_a e \mathcal{Q}_r descrivono l'orientamento delle terne corrispondenti alle matrici di rotazione \mathbf{R}_a ed \mathbf{R}_r^1 , mentre $\mathcal{Q}_{a,d}$ e $\mathcal{Q}_{r,d}$ descrivono le loro controparti desiderate. Dunque $\tilde{\epsilon}_a$ e $\tilde{\epsilon}_r$ descrivono l'orientamento relativo tra le terne effettive e desiderate rappresentato dalle matrici $\mathbf{R}_a \mathbf{R}_{a,d}^T$ e $\mathbf{R}_r \mathbf{R}_{r,d}^T$; questi termini possono essere calcolati a partire da \mathcal{Q}_a , \mathcal{Q}_r e le loro controparti desiderate come segue (Yuan, 1988)

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon}_a = -\eta_a \epsilon_{a,d} + \eta_{a,d} \epsilon_a + \mathbf{S}(\epsilon_{a,d}) \epsilon_a \\ \tilde{\epsilon}_r = -\eta_r \epsilon_{r,d} + \eta_{r,d} \epsilon_r + \mathbf{S}(\epsilon_{r,d}) \epsilon_r, \end{cases} \quad (5.15)$$

dove $\epsilon_r = \mathbf{R}_1 \epsilon_r^1$ e $\epsilon_{r,d} = \mathbf{R}_1 \epsilon_{r,d}^1$, ovvero l'orientamento relativo desiderato si suppone assegnato in terna locale e poi riportato in terna base tramite \mathbf{R}_1 .

È importante notare che la scelta di utilizzare i quaternioni fornisce un modo fisicamente significativo di esprimere gli errori di orientamento. Infatti, come mostrato in (Yuan, 1988) i due termini di errore $\tilde{\epsilon}_a$ e $\tilde{\epsilon}_r$ si annullano se e solo se le corrispondenti terne desiderate coincidono con quelle effettive. Inoltre, le loro componenti sono legate alle velocità angolari mediante la regola di propagazione. Infine, come sarà chiaro più avanti, l'analisi di stabilità viene notevolmente semplificata rispetto ad altre modalità di rappresentazione degli errori di orientamento come, ad esempio, la rappresentazione in termini di asse ed angolo equivalenti.

Nel caso di riferimenti costanti nel tempo, l'equilibrio del sistema (2.51), (2.52), (2.58) e (2.24) sotto l'azione della legge di controllo (5.10) soddisfa la condizione

$$\mathbf{J}_t^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} - \mathbf{J}^T \mathbf{V} \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

Assumendo \mathbf{J} quadrata e di pieno rango, ovvero che i manipolatori siano non ridondanti e si muovano in una regione dello spazio delle confi-

gurazioni in cui non vi sono singolarità cinematiche, l'equazione (5.16) può essere riscritta come

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} - \mathbf{V} \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{0}. \quad (5.17)$$

Essendo \mathbf{T}^T e \mathbf{V} matrici di rango pieno, la relazione precedente mostra che in condizioni di regime statico compaiono forze interne se vi sono errori non nulli nello spazio operativo di cooperazione. Tali errori possono essere dovuti a riferimenti non consistenti con la geometria della presa, ovvero che violano i vincoli di catena cinematica chiusa; in dettaglio, sfruttando la proprietà (2.21), la (5.17) può essere riscritta come

$$\mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} - \mathbf{V} (\mathbf{h}_{int,ss} - \mathbf{V}^\dagger \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss}) = \mathbf{0}. \quad (5.18)$$

Osservando che \mathbf{V} ricopre lo spazio nullo della matrice di presa \mathbf{W} , mentre \mathbf{W}^\dagger ricopre lo spazio immagine di \mathbf{W}^T , si deduce che i due termini a sinistra della eguaglianza (4.3), giacciono in sottospazi ortogonali, e quindi sono entrambi nulli. Inoltre, essendo \mathbf{W}^\dagger e \mathbf{V} matrici rettangolari alte di pieno rango, si può riscrivere la (5.18) come

$$\begin{cases} \mathbf{W} \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{V}^\dagger \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss}, \end{cases} \quad (5.19)$$

da cui si evince che solamente le componenti dell'azione proporzionale lungo le direzioni di forza interna provocano forze interne a regime.

Per limitare, o evitare del tutto, la comparsa di forze interne a regime, si può introdurre un filtraggio cinetostatico dell'azione proporzionale teso alla riduzione, o alla eliminazione completa, dei contributi che danno luogo a forze interne a regime. In dettaglio, l'azione proporzionale all'errore, considerata come una forza generalizzata di tipo elastico nello spazio operativo di cooperazione, viene dapprima trasformata in una forza nello spazio oggetto tramite la matrice Φ^{-T} . A questo punto si selezionano le sole componenti corrispondenti a forze esterne, e la forza risultante trasformata in una azione di controllo nello spazio dei giunti attraverso Φ^T e \mathbf{J}_t^T . Se l'obiettivo è la riduzione delle forze

interne piuttosto che l'eliminazione completa, si può aggiungere un termine che proietta solamente una frazione dell'azione proporzionale nello spazio delle forze interne. Dunque, l'azione di controllo risultante sarà

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T (\boldsymbol{\Sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) \boldsymbol{\Phi}^{-T} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_t - \mathbf{J}_t^T \mathbf{K}_d \mathbf{v}_t + \mathbf{g} + \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{g}_e, \quad (5.20)$$

dove $\boldsymbol{\Sigma} = \text{blockdiag}(\mathbf{I}_6, \mathbf{O}_6)$ è la matrice che effettua la selezione delle componenti di forza esterna nello spazio oggetto, mentre $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{I}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}$ seleziona le componenti corrispondenti a forze interne. Nella (5.20), la costante $\alpha \in [0, 1]$ svolge il ruolo di attenuazione delle componenti di $\mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss}$ lungo le direzioni di forza interna. In particolare, scegliendo $\alpha = 1$ si ottiene la legge di controllo (5.10). Nel caso si adotti la scelta $\alpha = 0$, le componenti dell'azione proporzionale corrispondenti a forze interne vengono completamente eliminate; in tal caso si ottiene la legge di controllo con *filtraggio cinetostatico* propriamente detto. Anche in questo caso l'utilizzo della legge (5.20) con α non nullo diviene necessario nel caso di oggetto caratterizzato da elevata cedevolezza lungo le direzioni interne.

Nel caso di riferimenti costanti nel tempo, l'equilibrio del sistema (2.51), (2.52), (2.58) e (2.24) sotto l'azione della legge di controllo (5.20) soddisfa la condizione

$$\mathbf{J}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T (\boldsymbol{\Sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) \boldsymbol{\Phi}^{-T} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} - \mathbf{J}^T \mathbf{V} \mathbf{h}_{int} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

che, in base alle relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{J}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}^{-T} = \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{T}^T \\ \mathbf{J}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\Phi}^{-T} = \mathbf{J}^T \mathbf{V} \mathbf{V}^\dagger \mathbf{T}^T. \end{cases} \quad (5.22)$$

Nell'ipotesi che \mathbf{J} sia di rango pieno, la (5.22) si può riscrivere come

$$\mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} - \mathbf{V} (\mathbf{h}_{int,ss} - \alpha \mathbf{V}^\dagger \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss}) = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Osservando che \mathbf{V} ricopre lo spazio nullo di \mathbf{W} e \mathbf{W}^\dagger ricopre lo spazio immagine di \mathbf{W}^T , si conclude che i due termini a sinistra della (5.23) sono ortogonali, e dunque entrambi nulli. Inoltre, essendo \mathbf{W}^\dagger e \mathbf{V} matrici rettangolari alte di rango pieno, si ottengono le due condizioni

$$\begin{cases} \mathbf{W} \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \alpha \mathbf{V}^\dagger \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss}. \end{cases} \quad (5.24)$$

La prima condizione assicura che le componenti dell'azione proporzionale giacenti nel sottospazio delle forze esterne si annullano a regime; la seconda relazione garantisce che le forze interne a regime si riducono del fattore α . In particolare, per $\alpha = 0$ le forze interne a regime si annullano. Dunque, l'adozione della legge di controllo con filtraggio cinetostatico riduce le forze interne a regime, anche nel caso in cui i riferimenti di spazio operativo di cooperazione violano i vincoli di catena cinematica chiusa. Si noti che l'azione di filtraggio non influisce sugli errori a regime dovuti a disturbi esterni, e dunque l'azione di controllo (5.20) è in grado di contrastarne pienamente gli effetti sul ciclo chiuso.

Le condizioni (5.24) possono essere interpretate come un insieme di vincoli sull'errore a regime $\mathbf{e}_{t,ss}$. La non linearità di tali equazioni non permette di dedurre conclusioni rigorose circa la natura delle loro soluzioni.

Nel caso in cui la cinematica diretta dei singoli manipolatori venga espressa ai virtual stick, le condizioni di equilibrio assumono la forma

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{a,ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \alpha \mathbf{K}_{p,r} \mathbf{e}_{r,ss}, \end{cases} \quad (5.25)$$

da cui si deduce che i riferimenti di moto assoluto vengono sempre raggiunti a regime, mentre le forze interne dipendono direttamente dall'azione proporzionale all'errore relativo tramite α . In particolare, nel caso $\alpha = 0$ si ottiene forza interna nulla a spese delle sole componenti relative dell'errore.

5.3 Analisi di stabilità

In analogia a quanto fatto nel capitolo precedente, i teoremi di La Salle saranno utilizzati per analizzare la stabilità delle soluzioni d'equilibrio delle (5.24).

Si consideri la seguente funzione scalare continua con le sue derivate parziali

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{ext}^T \mathbf{M}_e \mathbf{v}_{ext} + V_p + V_o, \quad (5.26)$$

dove $\mathbf{x} = [\mathbf{e}_t^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ appartiene al sottospazio $\Omega \subset \mathbb{R}^{24}$ costituito dagli errori e le velocità che soddisfano i vincoli di catena cinematica chiusa.

Nella (5.26) V_p è definita come segue:

$$V_p = \frac{1}{2} [\mathbf{e}_{a,p}^T \quad \mathbf{e}_{r,p}^T] \begin{bmatrix} k_{p,a} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & k_{p,r} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{a,p} \\ \mathbf{e}_{r,p} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

mentre V_o viene scelta come:

$$\begin{aligned} V_o &= k_{o,a} [(\eta_{a,d} - \eta_a)^2 + (\boldsymbol{\epsilon}_{a,d} - \boldsymbol{\epsilon}_a)^T (\boldsymbol{\epsilon}_{a,d} - \boldsymbol{\epsilon}_a)] \\ &\quad + k_{o,r} [(\eta_{r,d} - \eta_r)^2 + (\boldsymbol{\epsilon}_{r,d} - \boldsymbol{\epsilon}_r)^T (\boldsymbol{\epsilon}_{r,d} - \boldsymbol{\epsilon}_r)] \\ &= k_{o,a} [(\eta_{a,d} - \eta_a)^2 + (\boldsymbol{\epsilon}_{a,d} - \boldsymbol{\epsilon}_a)^T (\boldsymbol{\epsilon}_{a,d} - \boldsymbol{\epsilon}_a)] \\ &\quad + k_{o,r} [(\eta_{r,d} - \eta_r)^2 + (\boldsymbol{\epsilon}_{r,d}^1 - \boldsymbol{\epsilon}_r^1)^T (\boldsymbol{\epsilon}_{r,d}^1 - \boldsymbol{\epsilon}_r^1)]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Sia V_p che V_o sono quadratiche, e quindi $V(\mathbf{x})$ è definita positiva e radialmente illimitata nell'insieme Ω .

La derivata rispetto al tempo della V lungo le traiettorie del sistema è data da

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{h} - \mathbf{g}) + \mathbf{v}_{ext}^T (\mathbf{h}_{ext} - \mathbf{g}_e) + \dot{V}_p + \dot{V}_o, \quad (5.29)$$

dove si sono sfruttate le identità strutturali $\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} = 0$ e $\mathbf{v}_{ext}^T (\dot{\mathbf{M}}_e - 2\mathbf{C}_e) \mathbf{v}_{ext} = 0$. Esprimendo la velocità dell'oggetto come nella (2.23) e tenendo conto della (2.13), la (5.29) può essere riscritta come

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{V} \mathbf{h}_{int} - \mathbf{g} - \mathbf{J}^T \mathbf{W}^\dagger \mathbf{g}_e) + \dot{V}_p + \dot{V}_o. \quad (5.30)$$

Considerando il vincolo di catena chiusa (2.58) e sostituendo la legge di controllo (5.20) nella (5.30), si ottiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_t^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Phi}^{-T} \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{v}_t^T \mathbf{K}_d \mathbf{v}_t + \dot{V}_p + \dot{V}_o. \quad (5.31)$$

Si noti che anche il termine che rappresenta la proiezione dell'azione proporzionale nello spazio delle forze interne si annulla proprio in virtù del vincolo (2.58).

Tenendo conto delle relazioni (5.5), (5.9) e (5.15), ed assumendo riferimenti costanti rispetto al tempo, si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}_p + \dot{V}_o &= -k_{a,p} \mathbf{e}_{a,p}^T \dot{\mathbf{p}}_a - k_{r,p} \mathbf{e}_{r,p}^T \dot{\mathbf{p}}_r - k_{a,o} \mathbf{e}_{a,o}^T \boldsymbol{\omega}_a - k_{r,o} \mathbf{e}_{r,o}^T \boldsymbol{\omega}_r \\ &= -\mathbf{v}_t^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_t, \end{aligned} \quad (5.32)$$

e dunque la (5.31) diviene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}_t^T \mathbf{K}_d \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_t^T \Phi^T (\mathbf{I}_{12} - \Sigma) \Phi^{-T} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_t. \quad (5.33)$$

Il secondo termine a destra della (5.33) si annulla a causa del vincolo di catena chiusa $(\mathbf{I}_{12} - \Sigma) \Phi \mathbf{v}_t = \mathbf{0}$. Infatti, le ultime tre componenti di questo termine corrispondono ad un vettore di sole velocità interne. In definitiva si ha

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}_t^T \mathbf{K}_d \mathbf{v}_t, \quad (5.34)$$

da cui si deduce che \dot{V} è semidefinita negativa in tutto Ω .

L'insieme R di tutti i punti $\mathbf{x} \in \Omega$ per cui $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ è dato da

$$R = \{\mathbf{x} \in \Omega : \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\}. \quad (5.35)$$

Dall'analisi dell'equilibrio condotta precedentemente segue che il più grande insieme invariante contenuto in R è dato da

$$M = \{\mathbf{x} \in R : \mathbf{e}_{t,ss} \text{ soddisfa le (5.24)}\}. \quad (5.36)$$

Dunque il teorema dell'insieme invariante nella sua versione globale garantisce convergenza asintotica delle traiettorie del sistema a ciclo chiuso all'insieme M per qualunque condizione iniziale.

Se l'insieme M contiene l'origine, ovvero i riferimenti assegnati possono essere raggiunti senza violare i vincoli di catena chiusa, è significativo studiare il dominio di attrattività di $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Poichè $V(\mathbf{x})$ è quadratica, è sempre possibile trovare un numero positivo ℓ ed una regione limitata $\Omega_\ell \subset \Omega$ tali che $\Omega_\ell \cap M = \{\mathbf{0}\}$ e

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) < \ell \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\ell. \quad (5.37)$$

Applicando il teorema dell'insieme invariante nella sua versione locale, si riconosce che Ω_ℓ è un dominio di attrattività per il punto di equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Quando l'insieme M non contiene l'origine, i riferimenti assegnati non possono essere raggiunti senza violare i vincoli di catena cinematica chiusa. In tal caso si può studiare la stabilità locale degli elementi a

norma minima presenti in M ; a tale scopo si possono usare le stesse argomentazioni sfruttate in precedenza per stabilire la esistenza di un dominio di attrattività per tali elementi.

Nelle leggi di controllo di tipo PD definite nello spazio operativo di cooperazione si può adottare un termine di smorzamento calcolato direttamente nello spazio dei giunti $(-\mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}})$, al posto del termine derivativo $-\mathbf{J}_t^T\mathbf{K}_d\mathbf{v}_t$ calcolato nello spazio operativo di cooperazione. Tale scelta può implicare una notevole semplificazione della taratura sperimentale dei guadagni che compaiono nella legge di controllo. In tal caso l'analisi di stabilità può essere condotta in modo analogo utilizzando la stessa funzione V ; l'unica differenza è nell'espressione finale della derivata di V lungo le traiettorie del sistema, che assumerà la forma

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}}, \quad (5.38)$$

in luogo dell'espressione (5.34).

5.4 Compensazione non accurata dei termini gravitazionali

Nella pratica la massa dell'oggetto manipolato è spesso conosciuta in modo approssimato; in tal caso si ha a disposizione solo una stima nominale di termine di gravità $\hat{\mathbf{g}}_e$ e la legge di controllo (5.20) diventa

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_t^T\boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{\Sigma} + \alpha\bar{\boldsymbol{\Sigma}})\boldsymbol{\Phi}^{-T}\mathbf{K}_p\mathbf{e}_t - \mathbf{J}_t^T\mathbf{K}_d\mathbf{v}_t + \mathbf{g} + \mathbf{J}^T\mathbf{W}^\dagger\hat{\mathbf{g}}_e, \quad (5.39)$$

Analogamente a quanto visto nel capitolo precedente, i punti di equilibrio del sistema sotto la legge di controllo (5.39) soddisferanno le due condizioni

$$\begin{cases} \mathbf{W}\mathbf{T}^T\mathbf{K}_p\mathbf{e}_{t,ss} = \mathbf{g}_e - \hat{\mathbf{g}}_e \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \alpha\mathbf{V}^\dagger\mathbf{T}^T\mathbf{K}_p\mathbf{e}_{t,ss} \end{cases} \quad (5.40)$$

È evidente che la compensazione inaccurata della gravità dell'oggetto porta ad un insieme di configurazioni d'equilibrio differente da quello espresso dalle (5.24). Tuttavia, le forze interne a regime sono ancora nulle, nel caso $\alpha = 0$, oppure ridotte di una frazione α , nel caso generale.

La stabilità dei punti d'equilibrio dati dalla (5.40) può essere analizzata usando le stesse argomentazioni sfruttate nel capitolo precedente. A tale scopo si considerino le due funzioni potenziale $U_{g,e}(\mathbf{q})$ e $\hat{U}_{g,e}(\mathbf{q})$ definite dalle (4.19) e (4.20) e la seguente funzione scalare continua con le sue derivate parziali, ottenuta estendendo la funzione V nella (5.26)

$$V_{g,e}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{ext}^T \mathbf{M}_e \mathbf{v}_{ext} + V_p + V_o + U_{g,e}(\mathbf{q}) - \hat{U}_{g,e}(\mathbf{q}), \quad (5.41)$$

con $\mathbf{x} \in \Omega$. La funzione $V_{g,e}$ è radialmente illimitata grazie alla limitatezza delle funzioni che esprimono i due potenziali gravitazionali.

Tenendo conto delle (4.19), (4.20) e ipotizzando riferimenti costanti, si ottiene ancora

$$\dot{V}_{g,e}(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}_t^T \mathbf{K}_d \mathbf{v}_t, \quad (5.42)$$

che è semidefinita negativa su tutto Ω . Dunque il teorema dell'insieme invariante assicura la convergenza asintotica delle traiettorie del sistema all'insieme invariante

$$M_{g,e} = \{\mathbf{x} \in R : \mathbf{e}_{t,ss} \text{ soddisfa le (5.40)}\}. \quad (5.43)$$

Nel caso di compensazione imperfetta dei termini di gravità dei manipolatori, un ragionamento analogo al precedente porta a concludere la stabilità asintotica dell'equilibrio

$$\begin{cases} \mathbf{W}\mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} = \mathbf{W}\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}) \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{V}^\dagger[\mathbf{J}^{-T}(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}) + \alpha\mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss}] \end{cases} \quad (5.44)$$

dove $\hat{\mathbf{g}}$ denota una stima di \mathbf{g} . Va sottolineato che in tal caso all'equilibrio non si ottengono forze interne nulle neanche nel caso $\alpha = 0$, e la loro ampiezza dipende dal grado di accuratezza della compensazione dei termini gravitazionali relativi ai due manipolatori.

5.5 Regolazione delle forze interne

La legge di controllo (5.20) garantisce forze interne nulle all'equilibrio. Se si desidera imporre anche un riferimento di forza interna non nullo

o incrementare le prestazioni in termini di riduzione delle forze interne, bisogna ricorrere ad una retroazione diretta di forza.

Nella pratica sono disponibili misure di forza agli organi terminali ottenute mediante opportuni sensori; per risalire alle forze agenti sull'oggetto si può ricorrere alla trasformazione inversa della (2.13)

$$\mathbf{h}_o = \mathbf{U}^{-\text{T}} \mathbf{h}. \quad (5.45)$$

A questo punto, la legge di controllo (5.20) può essere modificata come segue

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \mathbf{J}_t^{\text{T}} \boldsymbol{\Phi}^{\text{T}} (\boldsymbol{\Sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) \boldsymbol{\Phi}^{-\text{T}} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_t - \mathbf{J}_t^{\text{T}} \mathbf{K}_d \mathbf{v}_t + \mathbf{g} + \mathbf{J}^{\text{T}} \mathbf{W}^\dagger \mathbf{g}_e \\ & + \mathbf{J}_t^{\text{T}} \boldsymbol{\Phi}^{\text{T}} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} (\mathbf{h}_{o,d} + \mathbf{K}_f (\mathbf{h}_{o,d} - \mathbf{h}_o)), \end{aligned} \quad (5.46)$$

dove $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{I}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{K}_f = \text{blockdiag}\{\mathbf{K}_{f,ext}, \mathbf{K}_{f,int}\}$ è una matrice definita positiva ed $\mathbf{h}_{o,d}$ rappresenta il riferimento di forza desiderata nello spazio oggetto.

Nell'ipotesi di riferimenti nello spazio operativo costanti nel tempo, l'equilibrio del sistema cooperante sotto la nuova legge di controllo soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}_t^{\text{T}} \boldsymbol{\Phi}^{\text{T}} (\boldsymbol{\Sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\Sigma}}) \boldsymbol{\Phi}^{-\text{T}} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} + \\ & \mathbf{J}_t^{\text{T}} \boldsymbol{\Phi}^{\text{T}} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} (\mathbf{h}_{o,d} + \mathbf{K}_f (\mathbf{h}_{o,d} - \mathbf{h}_{o,ss})) - \mathbf{J}^{\text{T}} \mathbf{V} \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.47)$$

che, in forza della relazione

$$\mathbf{J}_t^{\text{T}} \boldsymbol{\Phi}^{\text{T}} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{J}^{\text{T}} [\mathbf{O}_{12 \times 6} \quad \mathbf{V}], \quad (5.48)$$

può essere riscritta come

$$\begin{cases} \mathbf{W} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{h}_{int,d} + \alpha (\mathbf{I}_6 + \mathbf{K}_{f,int})^{-1} \mathbf{V}^\dagger \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{t,ss}, \end{cases} \quad (5.49)$$

da cui si deduce che, nel caso $\alpha = 0$ (filtraggio cinetostatico dell'azione proporzionale propriamente detto), il riferimento di forza è raggiunto a regime; se α è non nullo l'effetto delle componenti interne dell'azione proporzionale a regime viene ulteriormente ridotto di un fattore $(\mathbf{I}_6 + \mathbf{K}_f)^{-1}$.

Se la cinematica diretta dei singoli manipolatori viene espressa in termini dei virtual stick, allora la (5.49) diventa

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{a,ss} = \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{int,ss} = \mathbf{h}_{int,d} + \alpha(\mathbf{I}_6 + \mathbf{K}_{f,int})^{-1} \mathbf{K}_{p,r} \mathbf{e}_{r,ss}. \end{cases} \quad (5.50)$$

Per analizzare la stabilità delle soluzioni di equilibrio si può utilizzare la stessa funzione scalare $V(\mathbf{x})$ definita dalla (5.26). Si riconosce facilmente che la derivata rispetto al tempo di V lungo le traiettorie del sistema a ciclo chiuso è espressa dalla (5.34); infatti, sostituendo la legge di controllo (5.46) nella \dot{V} , i termini che relativi alla retroazione di forza non danno contributo a causa dei vincoli di catena chiusa (2.58). Le stesse argomentazioni usate in precedenza conducono a stabilire la convergenza asintotica globale all'insieme invariante

$$M' = \{\mathbf{x} \in R : \mathbf{e}_{t,ss} \text{ soddisfa le (5.49)}\} \quad (5.51)$$

e la stabilità asintotica locale degli elementi a norma minima in M' .

Infine, la stessa procedura seguita al paragrafo precedente può essere utilizzata per analizzare l'effetto della compensazione imperfetta dei termini di gravità sulla stabilità del sistema a ciclo chiuso.

Capitolo 6

Risultati sperimentali

In questo capitolo viene descritta l'*implementazione* sperimentale degli algoritmi di controllo descritti nei capitoli precedenti. L'installazione utilizzata per gli esperimenti è basata su due robot industriali equipaggiati con un controllore ad architettura *aperta*. L'unità di controllo centrale è costituita da un Personal Computer equipaggiato con una scheda DSP. I problemi di comunicazione e sincronizzazione tra il PC e le due unità di controllo originali sono stati risolti localmente mediante due connessioni bus-to-bus tra le unità di controllo ed il PC (Caccavale *et al.*, 1996a).

Gli esperimenti di controllo cinematico del sistema cooperante sono stati eseguiti utilizzando l'installazione in configurazione spaziale ridondante per eseguire compiti di puro coordinamento del moto (Caccavale *et al.*, 1996c).

Gli esperimenti di regolazione, sia nello spazio dei giunti che nello spazio operativo di cooperazione, sono stati eseguiti ponendo l'installazione cooperante in configurazione planare non ridondante. In questo caso si sono eseguiti compiti di manipolazione di un oggetto connesso ad entrambi i manipolatori.

I risultati delle esperienze di controllo, oltre ad evidenziare le caratteristiche salienti delle strategie di controllo proposte in questa dis-

sertazione, hanno dimostrato la pratica realizzabilità di algoritmi di controllo avanzati per sistemi cooperanti costituiti da robot industriali di tipo convenzionale.

6.1 L'installazione sperimentale

I test sperimentali descritti in questo capitolo sono stati eseguiti utilizzando una installazione sperimentale basata su manipolatori industriali convenzionali.

Partendo dalla architettura hardware e software del controllore industriale C3G 9000 prodotto da COMAU, la Tecnospaio S.p.A. ha sviluppato una architettura di controllo aperta che permette di interfacciare un calcolatore digitale (tipicamente un Personal Computer) con un manipolatore industriale, permettendo così all'utente di sviluppare il codice per la realizzazione di algoritmi di controllo avanzati.

Nel Laboratorio PRISMA del Dipartimento di Informatica e Sistemistica sono stati installati due manipolatori industriali SMART-3 S prodotti da COMAU, ciascuno comprendente il proprio controllore C3G 9000 in versione aperta. I manipolatori sono di tipo antropomorfo a sei gradi di libertà; uno di essi è montato su di una slitta attuata in modo da realizzare un sistema cinematicamente ridondante.

Per realizzare esperimenti di manipolazione cooperante risulta necessario controllare entrambi i manipolatori attraverso una sola unità: ciò è stato ottenuto sfruttando le potenzialità offerte dalla versione aperta dei controllori individuali. La possibilità di realizzare algoritmi con controllo diretto delle forze interne è data da due sensori di forza montati agli organi terminali. Adottando una opportuna procedura di sincronizzazione, la singola workstation di controllo è stata messa in grado di gestire in maniera corretta la comunicazione con entrambi i manipolatori ad un tempo di campionamento minimo di 2 ms.

È opportuno notare che la realizzazione del controllore per il sistema cooperante descritto non ha richiesto la modifica delle architetture di controllo individuali, ed è stato realizzato utilizzando robot industriali standard.

6.1.1 Il controllore C3G 9000 aperto

Il C3G 9000 è una unità di controllo per manipolatori industriali realizzato da COMAU S.p.A. (COMAU, 1993); esso è basato su bus VME e comprende due schede: la Robot CPU (RBC) e la Servo Control CPU (SCC):

- la RBC, equipaggiata con un processore Motorola 68020, gestisce l'interfaccia uomo-macchina e l'interpretazione dei programmi di movimentazione; una peculiarità di questa scheda è la presenza di un'area di memoria condivisa (*shared memory*) a cui tutte le altre schede presenti sul bus possono accedere;
- la SCC è equipaggiata con un microprocessore Motorola 68020 e un *Digital Signal Processor* (DSP) 320C25 della Texas Instruments; il codice eseguito dal processore 68020 si occupa essenzialmente della generazione di traiettorie, sia nello spazio giunti che in quello cartesiano, e della eventuale inversione cinematica; il DSP realizza la microinterpolazione dei riferimenti ai giunti ed uno schema di controllo indipendente ai giunti.

Nell'ambito del Progetto Finalizzato Robotica finanziato dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, è stata progettata e realizzata una versione aperta di tale controllore per consentire la sperimentazione di algoritmi di controllo avanzato per manipolatori robotici (Dogliani *et al.*, 1993).

In questa versione, un Personal Computer può essere connesso al controllore C3G 9000, per mezzo di un adattatore bus-to-bus realizzato dalla Bit3 Computer Co.; l'adattatore consiste di due schede, da installare nei due bus, che comunicano attraverso un cavo parallelo ad alta velocità. Una volta stabilita la connessione, il PC può accedere alla memoria condivisa presente sulla RBC, che viene vista come una finestra di 64 KByte nella memoria del PC. La sincronizzazione tra il PC ed il C3G 9000 avviene attraverso un segnale d'interruzione generato dal C3G 9000 ad una frequenza fissata, a cui il PC risponde effettuando le seguenti operazioni:

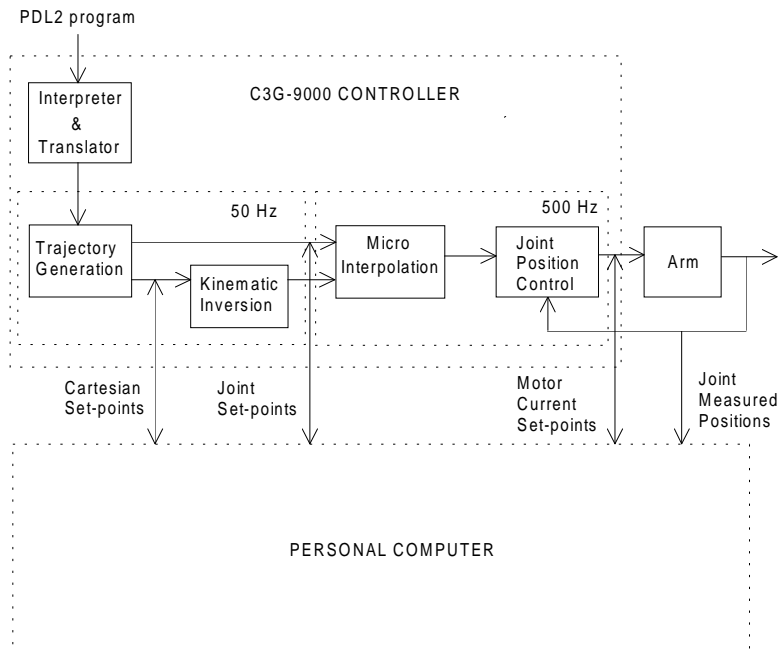


Figura 6.1: Schema funzionale del controllore C3G 9000 in versione aperta.

- legge un insieme di dati dalla shared memory,
- esegue le procedure sviluppate dall'utente,
- scrive i valori di uscita nella shared memory.

Sono previste varie modalità operative del controllore aperto, le quali consentono al PC di interagire con il C3G 9000 a differenti livelli (si veda la Fig. 6.1).

Nelle modalità di asservimento giunti (modalità 4 e 6), tutte le funzioni di generazione traiettorie del C3G 9000 sono disabilitate ed il segnale di interruzione viene inviato ogni millisecondo; in dettaglio:

1. nella *modalità 4* il PC può leggere le posizioni degli assi dei motori ed inviare i riferimenti di corrente ai motori, rimpiazzando così completamente i controllori d'asse del C3G 9000;

2. nella *modalità 6* il PC calcola i riferimenti di posizione ai giunti per i controllori d'asse del C3G 9000.

Una opzione importante in entrambe le modalità consiste nella possibilità di decidere di abilitare al moto solo alcuni giunti, lasciando gli altri meccanicamente frenati.

Sul PC è possibile utilizzare una libreria di funzioni C (PC-C3LINK) in ambiente MS DOS, che consente all'utente di sviluppare algoritmi di controllo senza doversi occupare degli aspetti di basso livello della comunicazione tra PC e C3G 9000.

6.1.2 I manipolatori e l'oggetto

I due manipolatori COMAU SMART-3 S costituenti l'installazione sono di tipo antropomorfo a sei gradi di mobilità. Uno di essi è montato su una slitta attuata la quale conferisce ridondanza cinematica sia al singolo manipolatore che al sistema cooperante.

Lo SMART-3 S è un manipolatore di media capacità di carico orientato ad applicazioni come la saldatura ad arco, la manipolazione di piccoli oggetti, la distribuzione di sigillante; esso possiede una struttura cinematica interessante dal punto di vista della ricerca: sono presenti sia degli offset (di spalla e di gomito) che un polso non sferico. Le coppie ai giunti sono fornite da motori brushless con freni di emergenza e *resolver* integrati per la misura delle posizioni angolari degli assi dei motori. Le trasmissioni sono realizzate tramite *riduttori Teijin* nei primi tre assi e tramite *harmonic drive* sugli assi del polso. La misura assoluta delle posizioni motore è ottenuta tramite i resolver integrati.

L'oggetto trasportato dal manipolatore è costituito da due barrette di bronzo, connesse ai due sensori di forza montati agli organi terminali attraverso delle interfaccie meccaniche di alluminio. Le due barrette sono connesse tra di loro mediante un dispositivo meccanico a pressione costituito da due barre di alluminio. Le due interfaccie meccaniche oggetto/sensore di forza prevedono la possibilità di introdurre giunti sferici per l'emulazione di contatti con rotazione.

Si noti che l'oggetto così realizzato possiede un certo grado di deformabilità a causa della presenza di parti in alluminio e dell'accoppiamento meccanico a pressione; ciò è stato inevitabile sia per motivi realizzativi, in modo da assicurare facilità di montaggio dell'oggetto tra i manipolatori, che di sicurezza, in quanto la deformabilità dell'oggetto assicura un certo grado di sicurezza passiva al sistema.

6.1.3 I sensori di forza generalizzata

I sensori di forza generalizzata utilizzati sono degli ATI F/T 130/10; ognuno di essi è costituito da due parti principali: il trasduttore e l'unità di condizionamento:

- il trasduttore è una struttura monolitica, montata all'organo terminale del manipolatore, che converte forze e momenti in deformazioni di estensimetri localizzati sulla sua superficie; l'elettronica integrata nel trasduttore realizza la misura delle resistenze degli estensimetri;
- l'unità di condizionamento elabora i segnali che arrivano dall'unità di trasduzione per calcolare le componenti cartesiane di forza e momento, che vengono successivamente trasferite al PC tramite una interfaccia parallela.

Le caratteristiche principali del sensore ATI sono i campi di misura di ± 130 N (forze) e di ± 10 Nm (momenti), con risoluzioni pari a 0.1 N (componenti di forza nel piano del sensore), 0.2 N (componente di forza ortogonale al piano) e 0.005 Nm (componenti di momento). La rigidità varia da 10^7 N/m (rigidità lineare) a 10^4 Nm/rad (rigidità torsionale).

La comunicazione tra la workstation e l'unità di condizionamento avviene tramite una connessione tra ciascuna unità ed una scheda parallela installata nel bus del PC. Per inizializzare e gestire le comunicazioni con il sensore è stata sviluppata una libreria di funzioni C.

6.1.4 La stazione di controllo

L'unità di controllo è una *workstation* basata su PC con processore Pentium a 133 MHz, Per aumentare le capacità computazionali della stazione di controllo, sul bus del PC è stata installata una scheda Digital Signal Processor basata sul processore AT&T WEDSP32C con clock a 50 MHz.

Il processore WEDSP32C comprende due unità di calcolo, l'unità in virgola mobile basata su un architettura pipeline a 32 bit ed una unità in virgola fissa con una architettura a 24 bit, che gli permettono di eseguire fino a 12.5 Mips o 25 Mflops.

L'ambiente di sviluppo si compone di un compilatore C/Assembler per la programmazione ad alto livello, di librerie di funzioni matematiche, di un debugger e di una libreria di funzioni per la comunicazione con il PC host.

6.1.5 Realizzazione dell'installazione

Uno dei principali problemi emersi nella realizzazione dell'installazione cooperante è stato quello dell'interfacciamento contemporaneo di due controllori C3G 9000 con un solo PC. Per motivi di opportunità economica si è scelto di utilizzare le architetture di controllo individuali, modificando esclusivamente la libreria PC-C3LINK. Le modalità operative più adatte agli scopi fissati sono state individuate in quelle operanti direttamente al livello di asservimento dei giunti (modalità 4 e 6).

La libreria PC-C3LINK è stata analizzata per localizzare le parti che avevano bisogno di essere completamente riscritte e per identificare le nuove funzionalità da aggiungere. Sulla base delle specifiche fissate da tale analisi, è stata sviluppata una nuova versione della libreria che permette, tra l'altro, di selezionare le linee di interruzione del PC da dedicare ad ogni C3G, di selezionare le aree di memoria del PC dove viene indirizzata la shared memory, di avere due flag per indicare l'arrivo dei segnali di interruzione da ogni C3G.

In Fig. 6.2 viene presentata la struttura hardware del sistema ottenuto che comprende anche l'acquisizione dei dati dai sensori di forza.

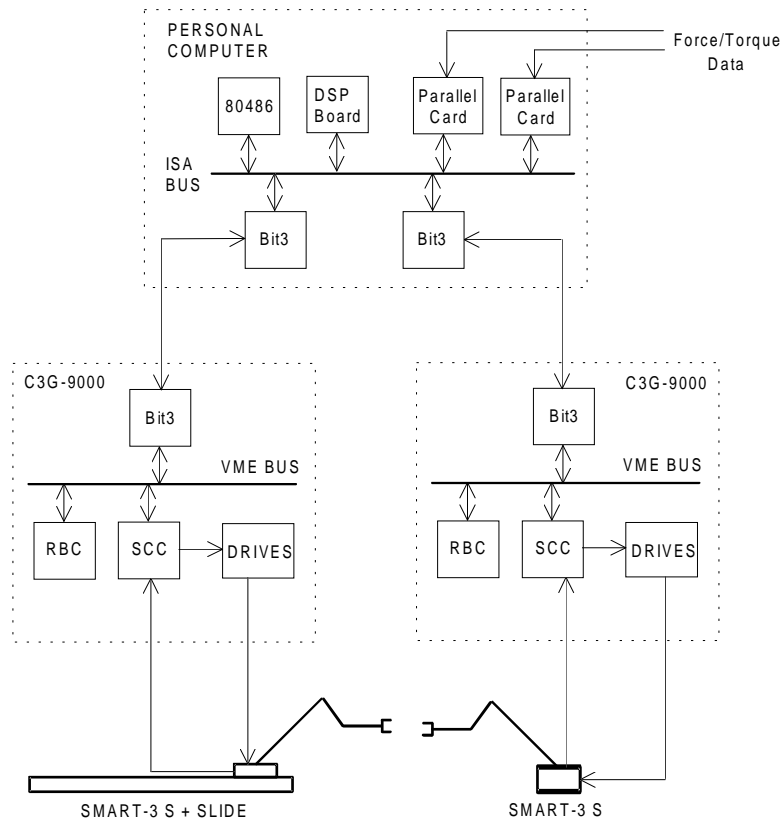


Figura 6.2: Schema hardware del sistema di manipolazione cooperante.

Dettagli sulla realizzazione e sulle caratteristiche dell'installazione sono riportati in (Caccavale *et al.*, 1996a).

Per comunicare con il PC, ogni unità C3G 9000 genera un segnale di interrupt ad una frequenza di 1000 Hz indipendentemente dall'altro; è dunque necessaria una procedura di sincronizzazione tra il PC e le due unità C3G 9000. Ogni interrupt che arriva segnala, per ogni unità, che un nuovo insieme di dati dai resolver è disponibile nella memoria condivisa. Con riferimento alla Fig. 6.3, quando un segnale di interruzione arriva al PC parte una finestra temporale di 700 microsecondi nella quale il PC può utilizzare in esclusiva la shared memory, mentre nei

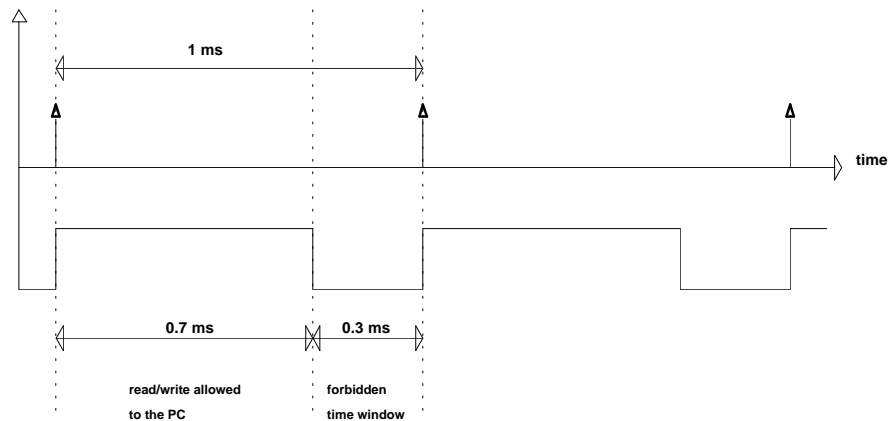


Figura 6.3: Temporizzazione della comunicazione PC/C3G 9000.

rimanenti 300 microsecondi solamente il C3G è abilitato ad utilizzarla.

Se il programma sul PC che realizza l'algoritmo di controllo cerca di agganciarsi a uno dei due segnali di interruzione provenienti dai C3G, può innescarsi un comportamento scorretto e potenzialmente pericoloso. Ad esempio, il PC potrebbe cercare di utilizzare la memoria condivisa a bordo di uno dei due C3G 9000 durante la finestra temporale in cui questa è riservata all'uso esclusivo da parte dell'unità C3G stessa. Dunque, le operazioni di lettura/scrittura effettuate dal PC sono da considerarsi affidabili solo durante la finestra temporale di 700 microsecondi che segue la rilevazione di una interruzione. Basandosi su tali considerazioni, si può prospettare una soluzione articolata in quattro fasi:

- 1) si assuma che uno dei due C3G abbia il ruolo di *leader*; appena il PC rileva il segnale di interruzione proveniente da esso, legge i dati disponibili nella relativa shared memory;
- 2) il PC attende il segnale di interruzione proveniente dall'altro C3G, che assumerà il ruolo di *follower*; appena questo arriva, i dati vengono letti dalla relativa shared memory;

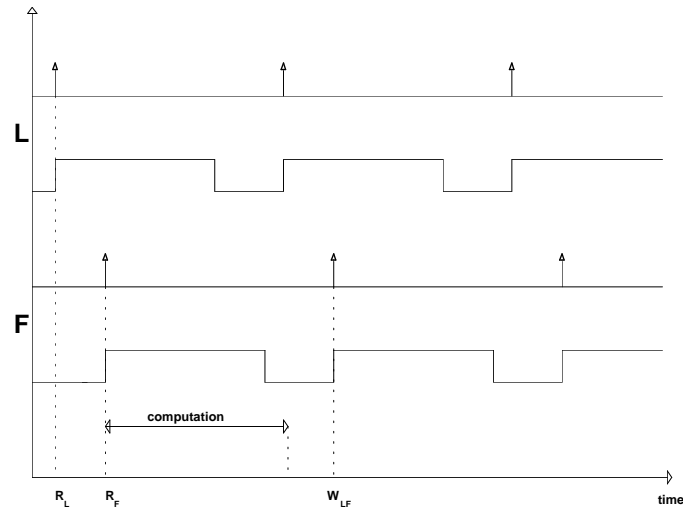


Figura 6.4: Temporizzazione tipica per la sincronizzazione dei due controllori (L: leader, F: follower, R: lettura dati dalla shared memory, W: scrittura dati nella shared memory).

- 3) il PC calcola l'uscita dell'algoritmo di controllo (ovvero i riferimenti di corrente per i motori ai giunti);
- 4) per comunicare i dati di uscita ad entrambe le unità C3G 9000, il PC attende la prossima interruzione del follower, se questa non è arrivata durante la fase 3.

In questa soluzione non è chiaro il criterio con cui decidere quale dei due C3G debba essere considerato come unità leader. Se la scelta non è effettuata in modo opportuno si possono verificare alcuni problemi: se l'interruzione dal follower arriva oltre 700 microsecondi dopo quella del leader, il PC potrebbe cercare di scrivere nella shared memory del leader durante la finestra temporale in cui ciò è proibito (memoria condivisa dedicata all'uso da parte del C3G).

Per superare questi problemi si può prevedere una fase di sincronizzazione iniziale per identificare correttamente i ruoli di leader e di follower. Durante la fase di sincronizzazione il PC calcola il ritardo

temporale tra il primo segnale di interruzione proveniente da ciascuna unità C3G 9000, e determina se esso è superiore o meno a 500 microsecondi: in questo modo si può identificare l'unità che svolge il ruolo di leader ed il problema sopra descritto viene evitato; inoltre, il ritardo tra i segnali di interruzione provenienti dal leader e dal follower è minimizzato. Si noti che con questa soluzione, nel caso più sfavorevole (cioè un ritardo di 500 microsecondi tra i due segnali di interruzione) il tempo massimo in cui si devono leggere i dati dal follower, eseguire i calcoli richiesti e scrivere i dati di uscita in entrambe le unità è pari a 1200 microsecondi (per evitare di scrivere durante la finestra temporale proibita dedicata all'unità C3G leader).

Una soluzione alternativa, necessaria nel caso in cui si abbia deriva tra le frequenze dei due segnali di interrupt, consiste nel prevedere una fase iniziale di sincronizzazione in cui il PC attende che i due interrupt provenienti dalle due unità si sovrappongano temporalmente (a meno di un piccolo intervallo di tolleranza). In questo modo, una volta scelta l'unità leader in maniera arbitraria, si ha a disposizione un intervallo di tempo consistente (circa 2 minuti) prima che la eventuale deriva di frequenza tra i due treni di interrupt possa influenzare la sincronizzazione.

Si noti che la soluzione prevista impone un tempo di campionamento per gli algoritmi di controllo pari a 2 ms (il doppio di quello minimo previsto nelle modalità 4 e 6). Comunque, considerando il carico computazionale tipico degli algoritmi di controllo per sistemi cooperanti e la potenza computazionale disponibile, questo non può essere considerato un vincolo reale sulle prestazioni del controllore.

6.2 Modellazione dei manipolatori

In questo paragrafo vengono sinteticamente descritte le caratteristiche cinematiche e dinamiche dei due manipolatori utilizzati per realizzare l'installazione cooperante.

Asse	a_i [m]	d_i [m]	ϑ_i [rad]	α_i [rad]
1	0.15	0.0	q_1	$-\pi/2$
2	0.61	0.0	q_2	0.0
3	0.11	0.0	q_3	$-\pi/2$
4	0.0	0.61	q_4	$\pi/2$
5	0.0	-0.113	q_5	$-\pi/2$
6	0.0	0.103	q_6	0.0

Tavola 6.1: Tabella di Denavit-Hartenberg (6 assi)

6.2.1 Cinematica

Il manipolatore SMART-3 S ha una struttura di tipo antropomorfo a sei gradi di mobilità. Da un punto di vista cinematico il manipolatore presenta alcune particolarità: un offset al giunto di spalla ed uno al giunto di gomito rendono la struttura portante sensibilmente diversa da quella di un antropomorfo classico. Gli ultimi tre giunti costituiscono un polso non sferico, in quanto gli ultimi tre assi si intersecano a due a due. La struttura dello SMART-3 S, nella sua versione con slitta, è riportata in Fig. 6.5.

La cinematica diretta del manipolatore può essere ottenuta mediante la composizione di matrici omogenee intermedie, ciascuna solidale ad un braccio del manipolatore (Sciavicco e Siciliano, 1996). La singola matrice di trasformazione è ottenibile in termini di parametri di Denavit-Hartenberg dipendenti dalla geometria della struttura di manipolazione. I quattro parametri di Denavit-Hartenberg per ciascun asse di moto dei due manipolatori sono riportati nelle tabelle 6.1 e 6.2.

Lo Jacobiano geometrico di ciascun manipolatore può essere ricavato in base alle grandezze intermedie risultanti dal calcolo della cinematica diretta.

L'espressione esplicita delle equazioni di cinematica diretta e degli Jacobiani non sono riportate in quanto molto complesse e poco leggibili. Esse sono state realizzate mediante procedure in linguaggio C che

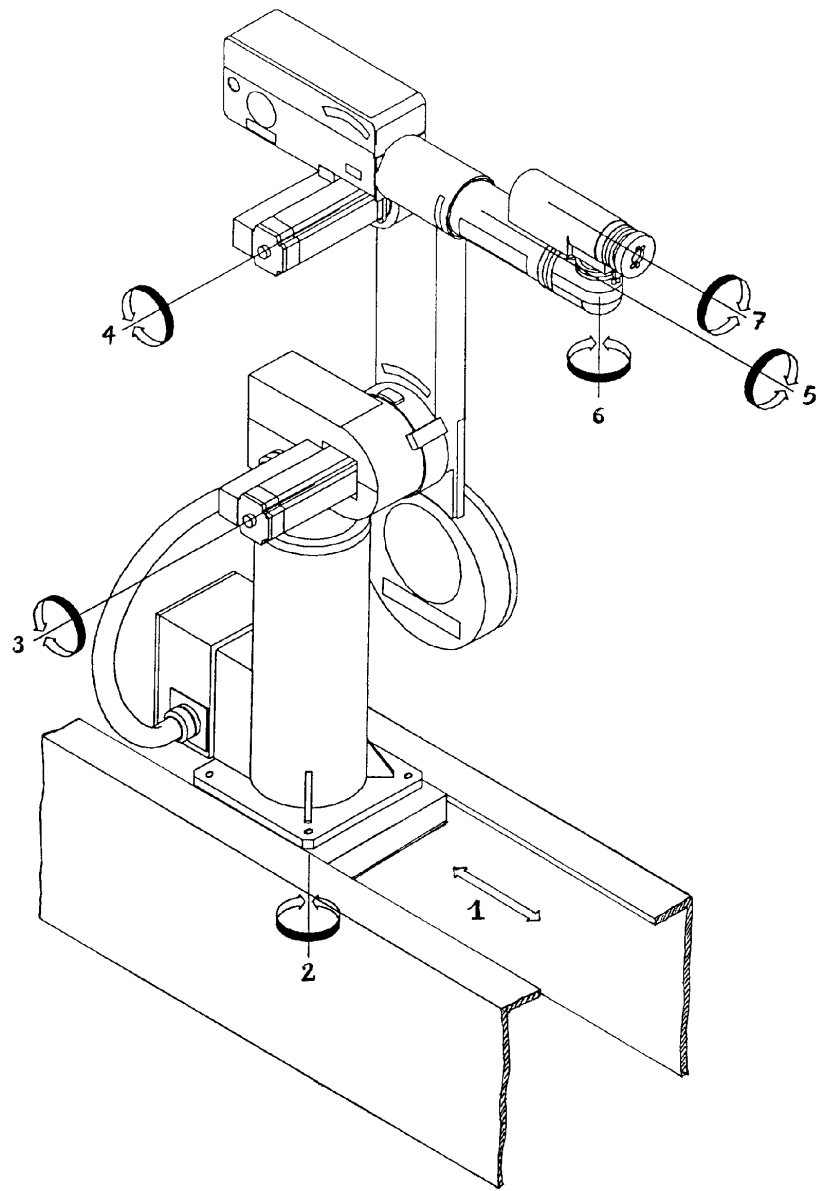


Figura 6.5: Il manipolatore SMART-3 S (versione con slitta).

<i>Asse</i>	a_i [m]	d_i [m]	ϑ_i [rad]	α_i [rad]
7	0.0	q_7	0.0	$-\pi/2$
1	0.15	0.85	q_1	$-\pi/2$
2	0.61	0.0	q_2	0.0
3	0.11	0.0	q_3	$-\pi/2$
4	0.0	0.61	q_4	$\pi/2$
5	0.0	-0.113	q_5	$-\pi/2$
6	0.0	0.103	q_6	0.0

Tavola 6.2: Tabella di Denavit-Hartenberg (7 assi)

calcolano posizione ed orientamento dell'organo terminale mediante la composizione delle matrici di trasformazione intermedie, e lo Jacobiano geometrico mediante la sua espressione in funzione delle grandezze cinematiche intermedie disponibili dal calcolo della cinematica diretta. Tali procedure sono state ottimizzate da un punto di vista computazionale eliminando tutte le operazioni ridondanti.

Come accennato precedentemente, l'installazione sperimentale permette di configurare il sistema in diversi modi, mantenendo abilitati solo alcuni giunti e frenando gli altri.

In particolare, abilitando per ciascun manipolatore solo i giunti 2 e 3 della struttura portante ed il giunto 5 del polso, si ottiene un sistema di due manipolatori planari a tre gradi di mobilità. Se per il secondo manipolatore si attiva anche la slitta, il sistema risulterà cinematicamente ridondante. Nel caso planare la cinematica diretta si semplifica notevolmente, in quanto il moto di ciascun organo terminale può essere descritto dal vettore \mathbf{p}_i di dimensioni (2×1) che ne individua la posizione nel piano del moto, e dall'angolo ϑ_i che ne individua l'orientamento rispetto all'asse orizzontale della terna base. Ne consegue che l'espressione delle variabili di spazio operativo di coope-

razione assumono l'espressione

$$\begin{cases} \mathbf{p}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \\ \vartheta_a = \frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ \mathbf{p}_r = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \\ \vartheta_r = \vartheta_2 - \vartheta_1, \end{cases} \quad (6.1)$$

che rendono molto più semplice e diretto il calcolo delle variabili legate all'orientamento (gli errori di inseguimento, ad esempio). Infatti, nel caso di moto planare le due terne di organo terminale sono sovrapponibili mediante una rotazione lungo l'asse z ortogonale al piano del moto; quindi avrà senso riferirsi alla sola componente lungo z dei quaternioni corrispondenti (che è l'unica non nulla)

$$\begin{cases} \eta_a = \cos(\vartheta_a/2) \\ \epsilon_{a,z} = \sin(\vartheta_a/2) \\ \eta_r = \cos(\vartheta_r/2) \\ \epsilon_{r,z} = \sin(\vartheta_r/2). \end{cases} \quad (6.2)$$

Inoltre, è facile riconoscere che la (5.15) nel caso planare diventa

$$\begin{cases} \tilde{\epsilon}_{a,z} = \sin(\tilde{\vartheta}_a/2) \\ \tilde{\epsilon}_{r,z} = \sin(\tilde{\vartheta}_r/2), \end{cases} \quad (6.3)$$

con $\tilde{\vartheta}_a = \vartheta_{a,d} - \vartheta_a$ e $\tilde{\vartheta}_r = \vartheta_{r,d} - \vartheta_r$.

Le equazioni di cinematica diretta per la configurazione planare, ridondante e non, possono essere ricavate particolarizzando quelle ottenute per la configurazione spaziale. Anche in questo caso esse sono state realizzate mediante procedure in linguaggio C.

La terna base comune per il sistema cooperante, sia nel caso spaziale che in quello planare, è stata fissata alla base del manipolatore a 6 giunti con l'asse y parallelo all'asse di moto della slitta del manipolatore a 7 giunti e l'asse z che orientato verso l'alto.

La calibrazione cinematica del sistema è avvenuta mediante prove sperimentali mirate alla determinazione della posizione relativa delle due terne base rispetto alle quali viene espressa la cinematica dei singoli

manipolatori (Szewczyk *et al.*, 1996). Infatti, la posizione dell'organo terminale del manipolatore a 7 giunti rispetto alla terna base del manipolatore a 6 giunti è stata determinata mediante un *bersaglio* montato sull'organo terminale stesso. Una volta portato l'organo terminale del manipolatore a 6 giunti in contatto con il bersaglio posto sull'altro organo terminale, sono state misurate le variabili di giunto. Dalla conoscenza accurata della geometria del bersaglio e della cinematica diretta dei due manipolatori è facile risalire alla posizione relativa delle due terne.

6.2.2 Dinamica

Il modello dinamico dei singoli manipolatori (2.50) può essere ricavato secondo la formulazione di Lagrange o Newton-Eulero (Sciavicco e Siciliano, 1996). Nel caso specifico degli SMART-3 S a 6 e 7 assi costituenti il sistema cooperante, il modello in forma chiusa è stato ricavato dalle equazioni di Newton-Eulero mediante una procedura automatica di calcolo simbolico.

Per ottenere un modello più aderente alla realtà fisica, oltre ai termini presenti a sinistra del modello (2.50), è stato considerato anche un termine di attrito τ_{fi} per ciascun manipolatore. Il modello della coppia di attrito $\tau_{fi,j}$ al giunto j -esimo del manipolatore i -esimo ha l'espressione

$$\tau_{fi,j} = \begin{cases} F_{vi,j}\dot{q}_{i,j} + F_{ci,j} \operatorname{sgn}(\dot{q}_{i,j}) & \text{se } |\dot{q}_{i,j}| \geq \dot{q}_{si,j} \\ \left(F_{vi,j} + \frac{F_{ci,j}}{\dot{q}_{si,j}} \right) \dot{q}_{i,j} & \text{se } |\dot{q}_{i,j}| < \dot{q}_{si,j}, \end{cases} \quad (6.4)$$

dove $F_{vi,j}$ ed $F_{ci,j}$ sono rispettivamente i coefficienti di attrito viscoso e di Coulomb, e $\dot{q}_{si,j}$ rappresenta una soglia di velocità introdotta per evitare discontinuità nel modello di attrito. Si noti che il modello (6.4) è in grado di catturare il comportamento dell'attrito ai giunti in modo accurato solo ad alte velocità (ovvero oltre la soglia $\dot{q}_{si,j}$), mentre risulta troppo semplificato per tener conto di fenomeni quali l'effetto Stribeck e l'attrito di primo distacco.

I parametri dinamici del modello, compresi quelli di attrito, sono stati identificati ricorrendo ad una procedura descritta in (Caccavale e Chiacchio, 1994). Tale procedura è basata sulla scrittura della (2.50) in forma lineare nei parametri

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)\boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{P}_i(\boldsymbol{\chi}_i)\boldsymbol{\gamma}_i \quad \boldsymbol{\chi}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

dove $\boldsymbol{\gamma}_i$ è il vettore ($13n \times 1$) dei parametri dinamici e \mathbf{P}_i è una matrice triangolare alta di dimensioni ($n \times 13n$). Calcolando la (6.5) su una traiettoria sufficientemente *eccitante* per la dinamica del manipolatore, si può applicare un algoritmo a minimi quadrati per la stima del vettore dei parametri. Tale procedura ha portato alla determinazione di una stima dei parametri dinamici per la struttura portante dei due SMART-3 S (Antonelli *et al.*, 1997). I risultati ottenuti mostrano una buona corrispondenza tra modello e realtà fisica, nonostante la presenza di dinamiche volutamente trascurate per motivi di semplicità e compattezza del modello.

Un procedura analoga è stata seguita per l'identificazione del modello dinamico dei due manipolatori in configurazione planare.

Dati i materiali usati per la sua realizzazione, si è ritenuta trascurabile la dinamica dell'oggetto.

6.3 Controllo cinematico

Lo schema di controllo cinematico presentato nel terzo capitolo è stato provato in una serie di esperimenti di puro coordinamento del moto. Nessun oggetto è stato montato tra i due manipolatori, e la configurazione prescelta è quella spaziale ridondante (tutti i giunti attivati). Il controllore aperto è stato posto nella modalità operativa 6: i controllori PID originari rimangono attivi, mentre il PC ha il compito di calcolare i riferimenti di posizione angolare per questi ultimi. Il passo di campionamento adottato è pari a 2 ms.

Nel primo test, il sistema cooperante è posto nella configurazione descritta da $\mathbf{p}_a = [-0.2 \ 1.3 \ 0]^T$, $\mathbf{p}_r = [0 \ 0.4 \ 0]^T$, $\mathbf{R}_a = \mathbf{I}$ ed

$\mathbf{R}_r^1 = \mathbf{I}$, con la slitta posizionata a 0.4, dove sono state usate tutte unità standard SI. Il compito assegnato si divide in quattro fasi:

- 1) si impone uno spiazzamento di posizione assoluta di 0.4 m lungo l'asse x e di 0.3 m lungo l'asse z della terna base da eseguirsi in 2.5 s;
- 2) successivamente si impone una rotazione assoluta di $\pi/4$ rad in senso antiorario intorno all'asse z da eseguirsi in 1.5 s;
- 3) in questa fase viene imposto uno spiazzamento di posizione relativa di 0.2 m che allontana i due organi terminali; il tempo di esecuzione imposto è 1 s;
- 4) viene imposta una rotazione relativa in senso orario di $\pi/4$ rad intorno al versore normale della terna di organo terminale del manipolatore a 6 giunti; tempo di esecuzione: 1 s;
- 5) nella fase finale si impone il ritorno alla configurazione iniziale e, come compito secondario per lo sfruttamento dei gradi di mobilità ridondanti, si richiede di massimizzare la misura di manipolabilità (Chiacchio *et al.*, 1991a; Chiacchio *et al.*, 1993) relativa alle sole variabili posizionali assolute; tempo di esecuzione imposto: 2.5 s.

La cinematica inversa viene risolta ricorrendo all'algoritmo (3.8) con l'adozione della pseudoinversa a minimi quadrati smorzata in luogo della pseudoinversa classica. La matrice di guadagno scelta è $\mathbf{K} = 500\mathbf{I}$, mentre la costante di peso del compito secondario nella (3.9) è stata selezionata come $k_c = 10$. I parametri che caratterizzano il calcolo del fattore di smorzamento scelti nella (3.11) sono $\epsilon = 0.1$ e $\lambda_M = 0.1$.

Le prestazioni del sistema di controllo sono state valutate sia in termini di errori algoritmici (dovuti alla cinematica inversa) che in termini di errori di asservimento (dovuti ai controllori indipendenti di giunto) valutati agli organi terminali attraverso le (3.3), (3.4).

I risultati riportati in Fig. 6.6 mostrano che gli errori algoritmici ottenuti, sia per le componenti assolute che per quelle relative, sono

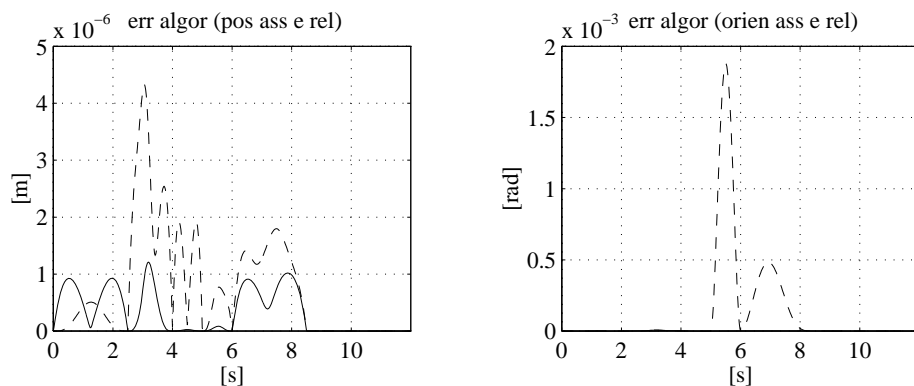


Figura 6.6: Norma degli errori di algoritmo assoluti (linea continua) e relativi (linea tratteggiata) per la posizione e l'orientamento nel primo test.

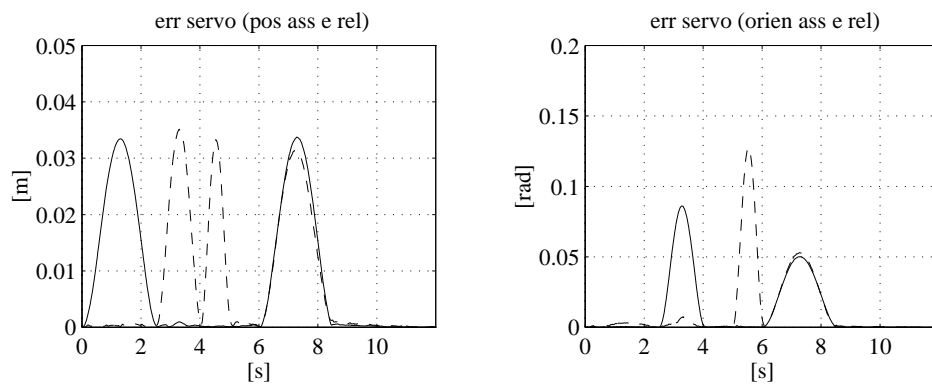


Figura 6.7: Norma degli errori di servo assoluti (linea continua) e relativi (linea tratteggiata) per la posizione e l'orientamento nel primo test.

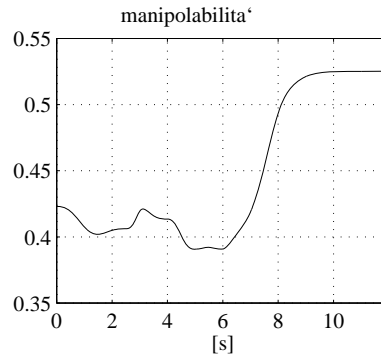


Figura 6.8: Misura di manipolabilità nel primo test.

molto piccoli durante le fasi di transitorio, e convergono a zero a regime. D'altra parte, i risultati in Fig. 6.7 rivelano la presenza di errori apprezzabili causati dalle limitate capacità di inseguimento dei regolatori PID industriali di cui è dotato il C3G 9000; è ovvio che l'uso di algoritmi di controllo del moto più sofisticati, basati sulla conoscenza del modello dinamico, ridurrebbe questa sorgente di errore. Infine, l'andamento della misura di manipolabilità in Fig. 6.8 conferma che l'algoritmo di inversione cinematica adottato è in grado di gestire efficacemente i gradi di mobilità ridondanti per ottimizzare un criterio secondario.

Il secondo test è stato concepito in modo da evidenziare l'efficacia dell'algoritmo di inversione cinematica nella gestione delle singolarità cinematiche del sistema. Il sistema cooperante è inizialmente posto in configurazione singolare; il compito assegnato prevede uno spiazamento di posizione assoluta di 0.05 m lungo l'asse x della terna base e di -0.3 m lungo l'asse y ; il tempo di esecuzione imposto è di 5 s.

L'algoritmo di inversione cinematica adottato in questo test è quello senza gestione della ridondanza (3.1). La matrice di guadagno \mathbf{K} è stata scelta come nel precedente test. Inoltre, le stime dei due ultimi valori singolari degli Jacobiani sono calcolate in linea sulla base dell'algoritmo proposto in (Chiaverini, 1993); il fattore di smorzamento è

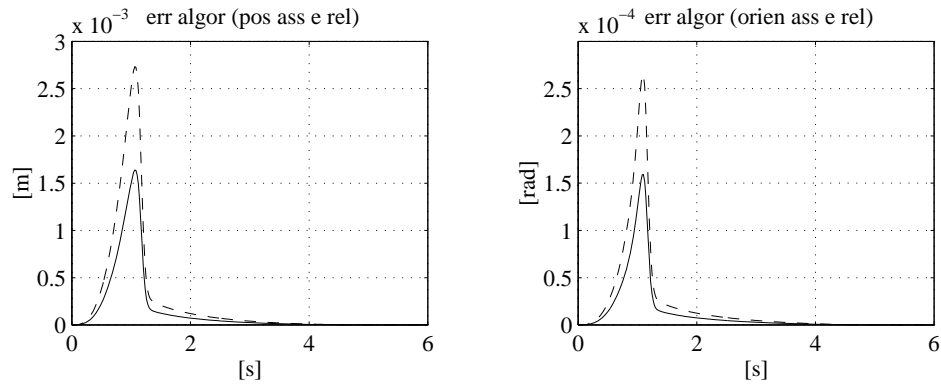


Figura 6.9: Norma degli errori di algoritmo assoluti (linea continua) e relativi (linea tratteggiata) per la posizione e l'orientamento nel secondo test.

calcolato come riportato dalla (3.11) utilizzando gli stessi valori di λ_M ed ϵ .

I risultati in Fig. 6.9 dimostrano che gli errori algoritmici tendono a zero dopo un picco iniziale dovuto al fatto che l'algoritmo cerca inizialmente non è in grado di inseguire componenti della traiettoria desiderata giacenti nel nullo dello Jacobiano. L'andamento delle stime dei due ultimi valor singolari riportate in Fig. 6.10 conferma che il manipolatore ridondante (ovvero quello dotato di 7 giunti) parte da configurazione singolare; inoltre, poiché l'ultimo valor singolare rimane sempre nei limiti fissati da ϵ , la pseudoinversa a minimi quadrati smorzata è usata lungo l'intera traiettoria.

6.4 Regolazione

Gli schemi di regolazione proposti nei capitoli 4 e 5 sono stati validati mediante prove sperimentali. L'oggetto descritto al paragrafo 6.1 è stato montato tra i due manipolatori in configurazione planare non ridondante (giunti 2,3 e 5 attivati). Il controllore aperto è stato posto in modalità 4; in tale modalità il PC ha il compito di calcolare sia

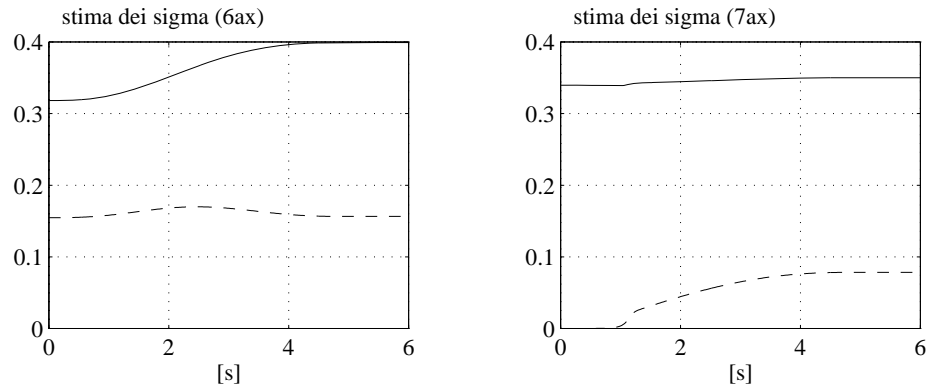


Figura 6.10: Stima degli ultimi due valor singolari degli Jacobiani dei due manipolatori nel secondo test.

i riferimenti di posizione ed orientamento per lo schema di controllo che i riferimenti di corrente per gli azionamenti di giunto. Il tempo di campionamento è 2 ms.

I compiti assegnati al sistema cooperante sono stati specificati utilizzando la formulazione orientata al compito nel caso planare (6.1). Nel caso degli schemi di regolazione ai giunti, viene eseguita in linea l'inversione cinematica analitica per il calcolo dei riferimenti di giunto a partire dalle variabili di definizione del compito (spazio operativo di cooperazione). La cinematica diretta utilizzata è stata espressa in termini di virtual stick mediante l'aggiunta di un offset sulla lunghezza dell'ultimo braccio del manipolatore.

Gli schemi validati sperimentalmente sono stati:

- 1) regolatore PD con compensazione della gravità nello spazio dei giunti (4.5) e nello spazio operativo (5.20); $\alpha = 1.0$;
- 2) regolatore PD con compensazione della gravità e controllo in forza lungo le direzioni interne nello spazio dei giunti (4.26) e nello spazio operativo (5.46); $\alpha = 1.0$;
- 3) regolatore PD con compensazione della gravità e controllo in forza

lungo le direzioni interne nello spazio dei giunti (4.26) e nello spazio operativo (5.46); $\alpha = 0.5$.

Per gli schemi nello spazio operativo si è scelto di modificare le leggi di controllo utilizzando i termini di smorzamento calcolati in termini di velocità ai giunti anzichè nello spazio operativo di cooperazione. Ciò facilita notevolmente la taratura sperimentale dei guadagni derivativi.

Gli errori di orientamento nello spazio operativo di cooperazione sono stati calcolati in base alle relazioni (6.3). Negli esperimenti i guadagni sono stati scelti pari a

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_p &= 10^3 \times \text{blockdiag}\{30, 20, 6, 30, 20, 6\} \\ \mathbf{K}_d &= 10^2 \times \text{blockdiag}\{20, 4, 0.8, 20, 4, 0.8\},\end{aligned}$$

per la legge di controllo nello spazio dei giunti; nella legge di controllo nello spazio operativo i guadagni posizionali sono stati scelti come segue

$$\begin{aligned}k_{p,a} &= 130 \times 10^3, & k_{o,a} &= 130 \times 10^3, \\ k_{p,r} &= 70 \times 10^3, & k_{o,r} &= 7 \times 10^3,\end{aligned}$$

mentre la matrice di guadagno dell'azione derivativa \mathbf{K}_d è stata scelta come in precedenza. Il guadagno di forza lungo le direzioni interne è stato scelto pari a $\mathbf{K}_f = 3.5\mathbf{I}_3$ per entrambi gli schemi.

Il primo compito assegnato prevede che, a partire dalla configurazione di spazio operativo di cooperazione

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{a,0} &= \begin{bmatrix} 1.3032 \\ 0.0717 \end{bmatrix} & \vartheta_{a,0} &= \pi/2 \\ \mathbf{p}_{r,0} &= \begin{bmatrix} 0.0984 \\ 0.0 \end{bmatrix} & \vartheta_{r,0} &= \pi,\end{aligned}\tag{6.6}$$

si realizzi uno spiazzamento di posizione relativa di 5 mm lungo l'asse delle x mantendendo costante le altre variabili. Tale compito porta ad uno sforzo di compressione applicato all'oggetto lungo il suo asse orizzontale e dunque alla comparsa di forze interne lungo la stessa direzione. Per gli schemi con regolazione di forza interna il riferimento di forza interna generalizzata è $\mathbf{h}_{int,d} = \mathbf{0}$.

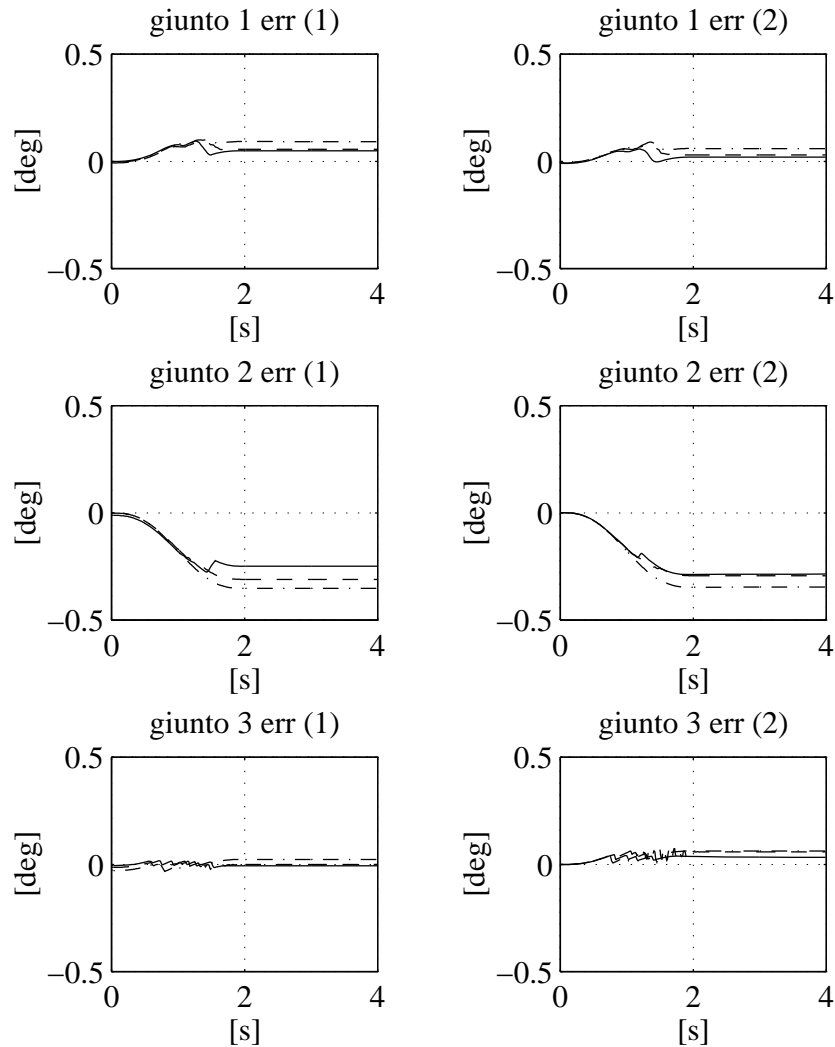


Figura 6.11: Errori di inseguimento per il regolatore PD con compensazione di gravità ai giunti: $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea trattopunto). Primo test.

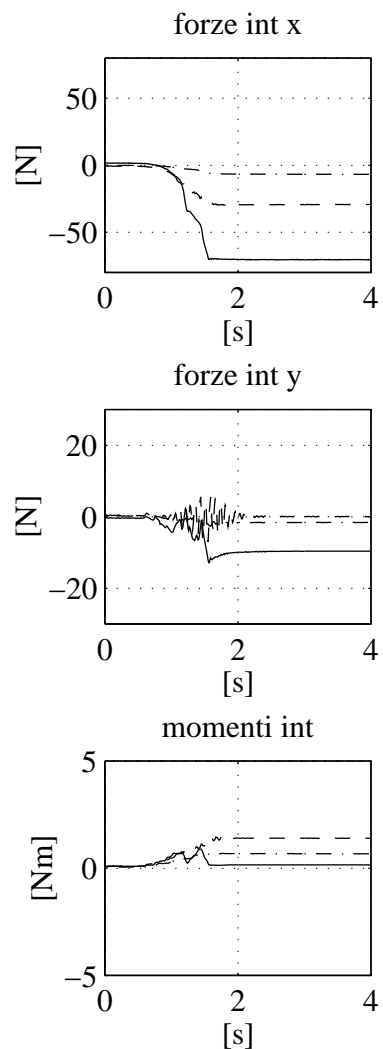


Figura 6.12: Forze interne per il regolatore PD con compensazione di gravità ai; $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea tratto-punto). Primo test.

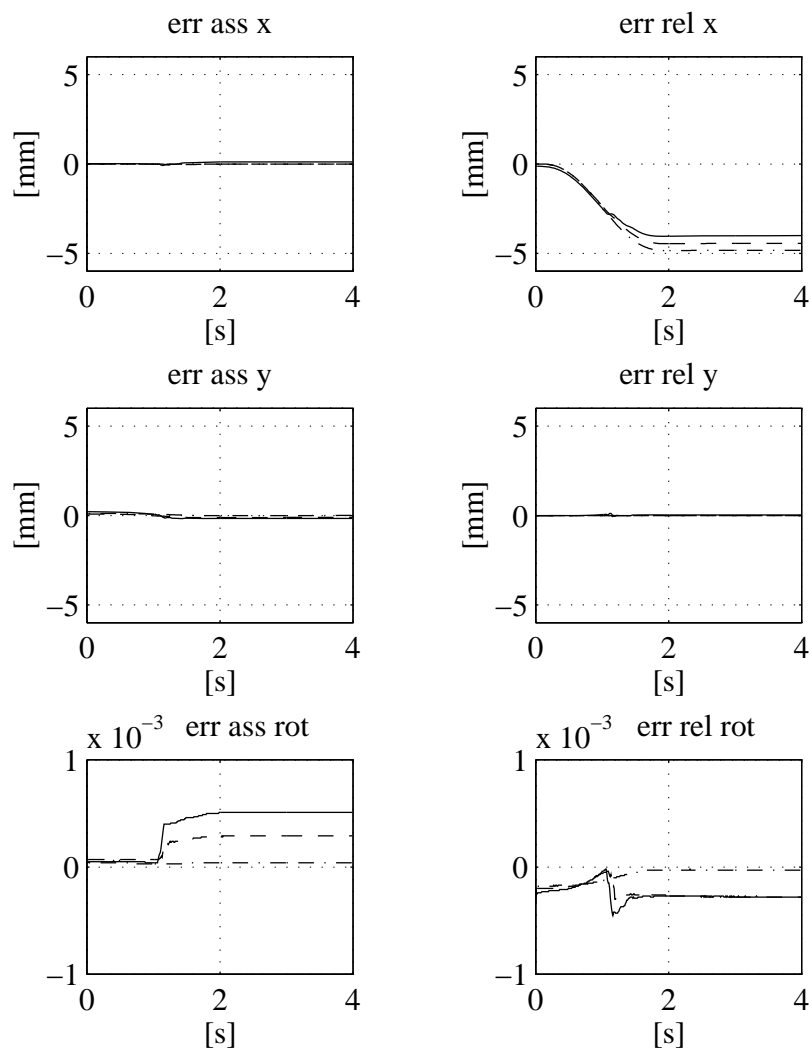


Figura 6.13: Errori di inseguimento assoluti e relativi per il regolatore PD con compensazione di gravità nello spazio operativo di cooperazione: $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea tratto-punto). Primo test.

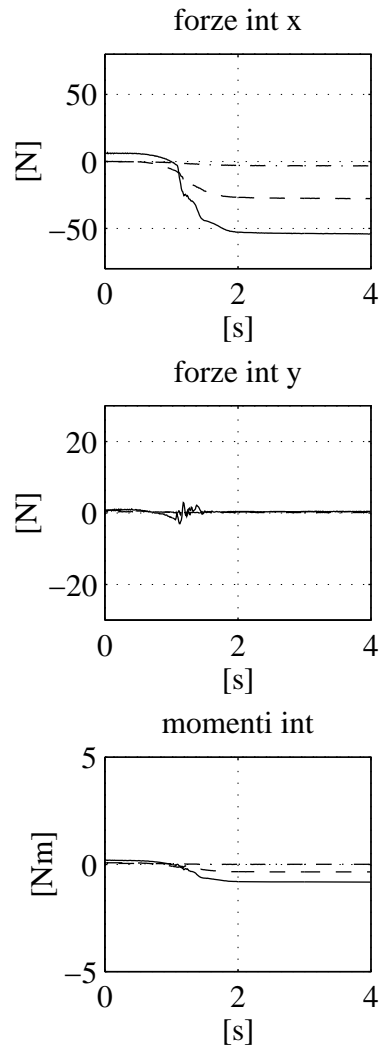


Figura 6.14: Forze interne per il regolatore PD con compensazione di gravità nello spazio operativo di cooperazione: $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea tratto-punto). Primo test.

Per gli schemi di regolazione nello spazio operativo di cooperazione, gli errori di orientamento sono calcolati in base alle (6.3).

Si noti che, a causa della deformabilità dell'oggetto e dell'implementazione a tempo discreto delle leggi di controllo, non è in generale possibile ottenere un comportamento stabile con $\alpha = 0.0$ (filtraggio cinetostatico propriamente detto). Ciò è stato verificato sperimentalmente mediante una serie di test in assenza di oggetto o in presenza di un oggetto estremamente deformabile. Per tale motivo è stato adottato un valore di α non nullo.

I risultati nelle Fig. 6.11 e 6.12 mostrano che l'adozione di un controllo con filtraggio cinetostatico (anche se parziale) porta ad una drastica riduzione delle forze interne a regime lungo l'asse x a spese di maggiori errori di raggiungimento ai giunti, mentre l'adozione di un anello di forza senza filtraggio cinetostatico fornisce prestazioni inferiori.

È importante notare che, in assenza dell'azione in forza e del filtraggio dell'azione di controllo, i riferimenti vengono comunque parzialmente raggiunti anche se non compatibili con la geometria della presa; ciò è dovuto alle caratteristiche di deformabilità dell'oggetto manipolato.

Gli andamenti riportati nelle Fig. 6.13 e 6.14 mostrano risultati analoghi per lo schema di regolazione nello spazio operativo: l'adozione di un anello in forza aiuta a ridurre le forze interne a regime lungo la direzione interessata da forze interne. Attenuando le componenti interne dell'azione proporzionale di un fattore $\alpha = 0.5$, le forze interne a regime vengono ulteriormente ridotte, a dimostrazione della bontà dell'approccio basata sul filtraggio cinetostatico dell'azione di controllo.

Si noti che gli errori a regime ottenuti con l'adozione della legge di controllo (5.46) con $\alpha = 0.5$ sono i più alti; ciò sottolinea che il filtraggio cinetostatico riesce a ridurre gli stress interni all'oggetto a spese dell'aggiungimento dei riferimenti relativi, come evidenziato dalla (5.25).

Il secondo compito assegnato prevede che, a partire dalla stessa configurazione di spazio operativo di cooperazione assegnata in prece-

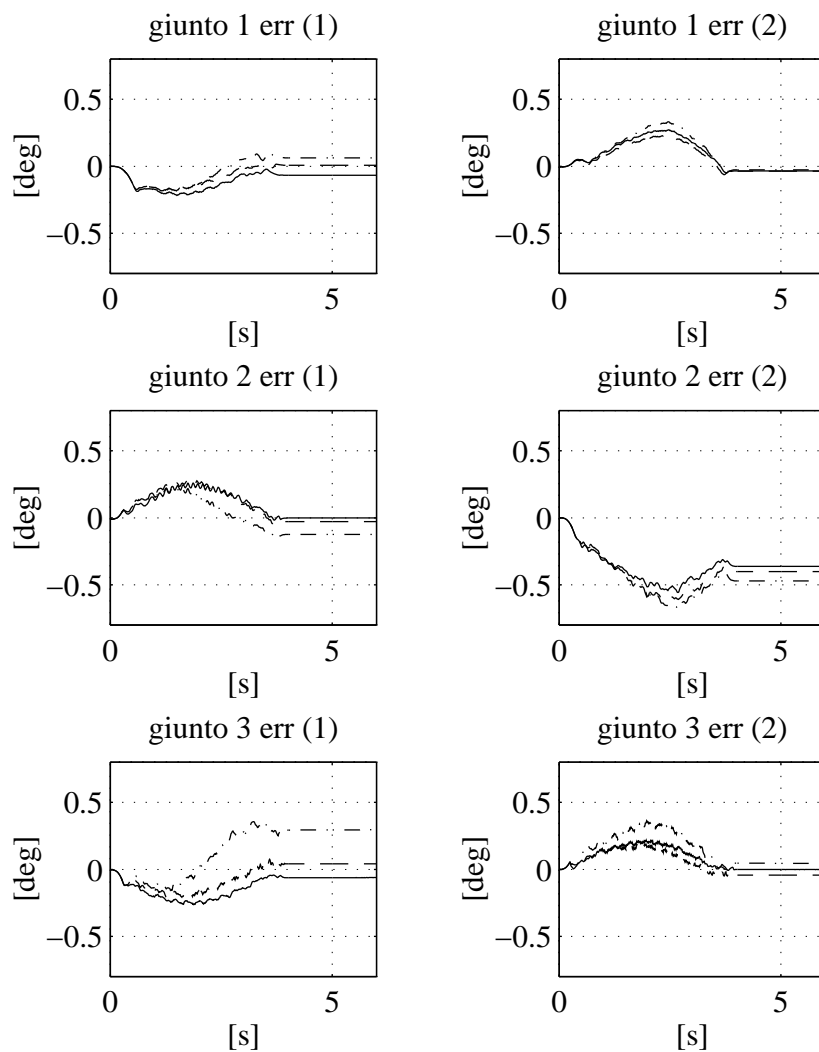


Figura 6.15: Errori di inseguimento ai giunti per il regolatore PD con compensazione di gravità ai giunti: $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea tratto-punto). Secondo test.

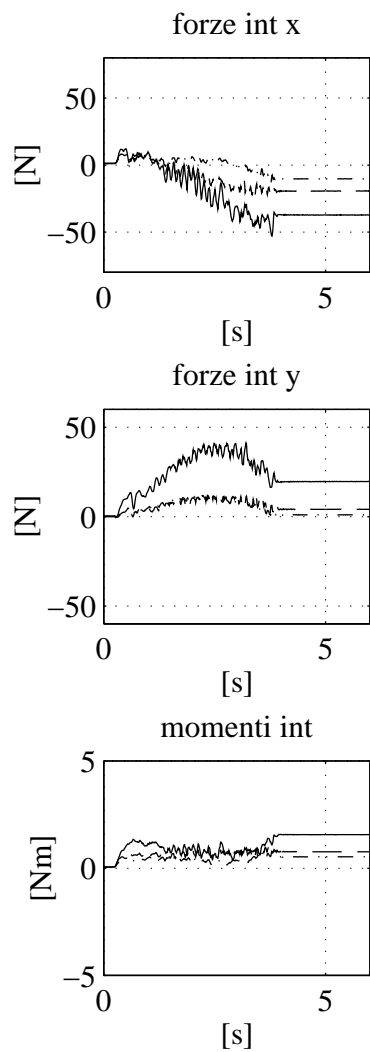


Figura 6.16: Forze interne per il regolatore PD con compensazione di gravità ai giunti; $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea tratto-punto). Secondo test.

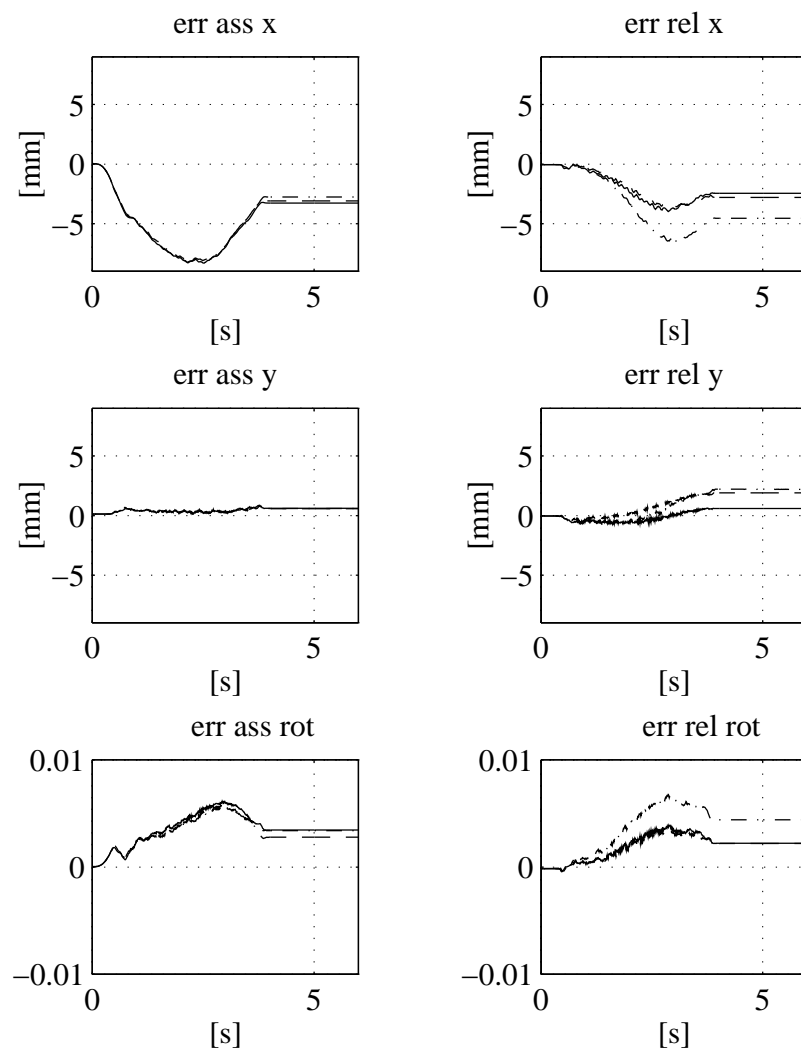


Figura 6.17: Errori di inseguimento assoluti e relativi per il regolatore PD con compensazione di gravità nello spazio operativo di cooperazione: $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea tratto-punto). Secondo test.

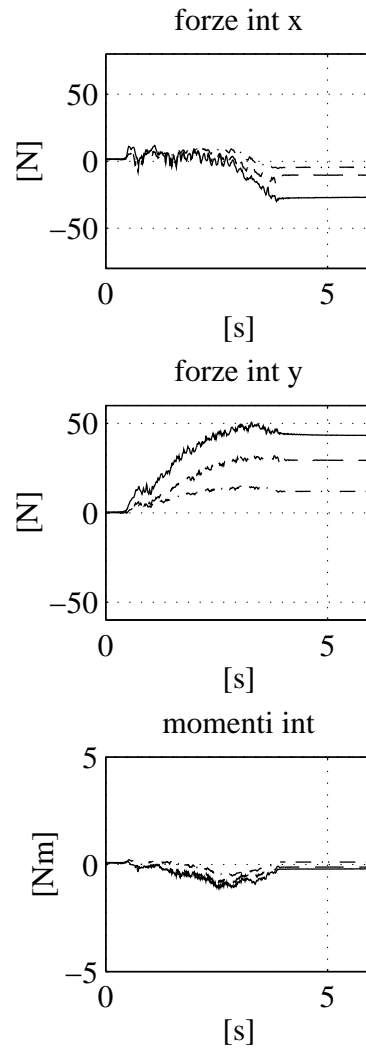


Figura 6.18: Forze interne per il regolatore PD con compensazione di gravità nello spazio operativo di cooperazione: $\alpha = 1.0$ (linea continua), $\alpha = 1.0$ ed anello di forza (linea tratteggiata), $\alpha = 0.5$ ed anello di forza (linea tratto-punto). Secondo test.

denza, si realizzi uno spiazzamento di posizione assoluta di -15 cm lungo l'asse delle x ed una rotazione assoluta di 0.3 rad; le altre variabili desiderate sono mantenute costanti e pari ai loro valori iniziali. Tale compito, pur non richiedendo uno spiazzamento relativo tra i due organi terminali, porta a sforzi interni applicati all'oggetto di trazione e torsione dovuti ad errori di inseguimento dei riferimenti assegnati. Anche in questo caso per gli schemi con regolazione di forza interna il riferimento di forza interna generalizzata è $\mathbf{h}_{int,d} = \mathbf{0}$. I guadagni posizionali e di forza interna sono invariati.

Gli andamenti riportati nelle Fig. 6.15, 6.16, 6.17 e 6.18 evidenziano ancora una volta che l'adozione del filtraggio cinetostatico dell'azione di controllo riduce drasticamente le forze interne, anche se dovute ad errori di inseguimento.

In definitiva, i risultati delle esperienze mostrano una sostanziale coerenza con i risultati teorici, anche in presenza di fenomeni non modellati quali deformabilità dell'oggetto, fenomeni di attrito a bassa velocità e la presenza giochi meccanici ai giunti.

Capitolo 7

Conclusioni

In questa dissertazione sono stati trattati aspetti di modellistica e controllo dei sistemi robotici di manipolazione cooperante.

Gli aspetti riguardanti la cinetostatica e la dinamica di tali sistemi sono stati analizzati ed approfonditi. In particolare, sono state studiate e comparate due formulazioni cinetostatiche differenti: la formulazione simmetrica e la formulazione orientata al compito. Sono state inoltre derivate alcune relazioni fondamentali tra le grandezze definite dalle due formulazioni.

Le equazioni dinamiche del moto, comprensive dei vincoli cinematici di catena chiusa, sono stati derivate in termini di variabili di giunto dei singoli manipolatori, di variabili di spazio oggetto e di variabili di spazio operativo di cooperazione.

Le problematiche legate al controllo del moto coordinato di più manipolatori cooperanti sono state affrontate mediante un approccio di controllo cinematico basato sulla formulazione di spazio operativo orientata alla definizione del compito. La validazione sperimentale di tale strategia di controllo ha confermato le sue potenzialità applicative in ambito industriale, derivanti dalla sua compatibilità con unità di governo robotiche di tipo convenzionale.

Il problema della regolazione per sistemi di manipolatori cooperanti

in senso stretto è stata affrontata introducendo una azione di filtraggio cinetostatico delle componenti della legge di controllo che danno luogo a forze interne a regime. Come risultato si è giunti alla determinazione di due strutture di regolazione, operanti rispettivamente nello spazio dei giunti e nello spazio operativo di cooperazione, costituite da un'azione PD con compensazione dei termini di gravità. Le due leggi di controllo sono state formulate come *famiglie* di regolatori parametrizzate rispetto ad una costante rappresentativa dell'attenuazione delle forze interne a regime.

Le prestazioni dei due schemi sono stati analizzate in termini di convergenza dell'errore di inseguimento e di robustezza rispetto a compensazioni imperfette dei termini di gravità. Infine è stata proposta l'introduzione di un anello per la regolazione diretta delle forze interne.

I risultati dei test sperimentali effettuati, coerenti con le conclusioni dell'analisi teorica, hanno confermato che le strutture di regolazione proposte sono in grado di ridurre drasticamente gli sforzi meccanici applicati all'oggetto manipolato.

Una parte consistente di questo studio è stata dedicata alla descrizione delle soluzioni adottate per l'installazione del sistema di manipolazione cooperante utilizzato negli esperimenti. Il sistema, messo a punto ed installato presso il Laboratorio PRISMA del Dipartimento di Informatica e Sistemistica di Napoli, è basato su un'architettura di controllo *aperta*.

L'area di ricerca riguardante i sistemi di manipolazione cooperante ha avuto uno sviluppo relativamente recente: alcune tematiche fondamentali sono state affrontate dalla comunità scientifica internazionale, altre sono ancora da esplorare. Anche per questa ragione, questa dissertazione non ambisce ad esaurire le problematiche di controllo e modellistica dei sistemi di manipolazione cooperante. È tuttavia opportuno presentare quelle che, a giudizio di chi scrive, possono essere possibili direzioni di sviluppo della ricerca futura.

Nell'ambito della modellistica alcuni temi di interesse possono essere indentificati nello sviluppo di formulazioni cinetostatiche alternative (Caccavale e Szewczyk, 1996b), e nel perfezionamento della formu-

lazione orientata al compito mediante l'utilizzo dei quaternioni per la definizione delle variabili di orientamento.

Nell'ambito del controllo cinematico, potrebbe essere proficua la sua applicazione a compiti di possibile interesse in ambito industriale, quali operazioni di assemblaggio di parti e di saldatura su profili complessi.

Nell'ambito del controllo con filtraggio cinetostatico, sarebbe importante dare ulteriore sviluppo all'analisi sperimentale delle strategie di controllo presentate in questo lavoro, verificandole anche caso di sistemi di manipolatori non planari. Inoltre, appare necessario il passaggio da strategie di regolazione a strategie di controllo di traiettoria basate sul modello con filtraggio cinetostatico dell'azione di controllo; a tal proposito alcuni risultati preliminari sono forniti in (Caccavale e Szewczyk, 1996b).

Infine, dai risultati sperimentali riportati in questa dissertazione emerge in modo chiaro l'esigenza di affrontare in maniera diretta il problema della manipolazione di oggetti elastici adottando tecniche di controllo sviluppate *ad hoc*, e basate su una modellistica opportunamente riformulata; in questo ambito, secondo l'opinione di chi scrive, potrebbero concentrarsi gli sforzi di ricerca per sintetizzare leggi di controllo applicabili per una vasta classe di oggetti manipolati, caratterizzati da diversi gradi di cedevolezza o di deformabilità.

Bibliografia

- G. Antonelli, F. Caccavale e P. Chiacchio. Experimental estimation of dynamic parameters for an industrial manipulator. *Proceedings of 2nd Mathmod*, pp. 667–672, Vienna, A, 1997.
- F. Caccavale e P. Chiacchio. Identification of dynamic parameters and feedforward control for a conventional industrial manipulator. *Control Engineering Practice*, vol. 2, no. 6, pp. 1039–1050, 1994.
- F. Caccavale, A. Carozzi e P. Chiacchio. Manipolazione cooperante: un'installazione sperimentale. *Automazione e Strumentazione*, no. 4, pp. 117–122, 1996a.
- F. Caccavale e J. Szewczyk. Experimental results of operational space control on a dual-arm robot system. *6th International Symposium on Robotics and Manufacturing*, Montpellier, F, 1996b.
- F. Caccavale, P. Chiacchio, S. Chiaverini e B. Siciliano. Experiments of kinematic control on a two robot system. *11th CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Udine, I, 1996c.
- F. Caccavale, P. Chiacchio e S. Chiaverini. Cooperative task-space control with kinetostatic filtering of a two-manipulator system. *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 37–42, Detroit, MI, 1996d.
- F. Caccavale, P. Chiacchio e S. Chiaverini. Stability analysis of a joint space control law for a two-manipulator system. *Proceedings of*

the 35th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3008–3013, Kobe, J, 1996e.

- F. Caccavale, P. Chiacchio e S. Chiaverini. Stability analysis of a joint space control law for a two-manipulator system. Sottomesso per la pubblicazione in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997a.
- F. Caccavale, P. Chiacchio e S. Chiaverini. A cooperative task-space control law for a two-manipulator system. Sottomesso per la presentazione al *Fifth IFAC Symposium on Robot Control*, Nantes, F, 1997b.
- COMAU S.p.A. C3G-9000 – User Guide. Torino, 1993.
- P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco e B. Siciliano. Global task space manipulability ellipsoids for multiple arm systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 5, pp. 678–685, 1991a.
- P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco e B. Siciliano. Closed-loop inverse kinematics schemes for constrained redundant manipulators with task space augmentation and task priority strategy. *International Journal of Robotics Research*, vol. 10, no. 4, pp. 410–425, 1991b.
- P. Chiacchio, S. Chiaverini e B. Siciliano. Kineto-static analysis of cooperative robot manipulators achieving dexterous configurations. *9th CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Udine, I, Sep. 1992; in *RoManSy 9*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 187, A. Morecki, G. Bianchi, K. Jaworek (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, D, pp. 93–100, 1993.
- P. Chiacchio e S. Chiaverini. PD-type control schemes for cooperative manipulator systems. *International Journal of Intelligent Automation and Soft Computing*, vol. 2, no. 2, 1996.

- P. Chiacchio, S. Chiaverini e B. Siciliano. Direct and inverse kinematics for coordinated motion tasks of a two-manipulator system. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 118, no. 4, 1996.
- S. Chiaverini. Estimate of the two smallest singular values of the Jacobian matrix: application to damped least-squares inverse kinematics. *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, pp. 991–1008, 1993.
- S. Chiaverini, O. Egeland e R.K. Kanestrøm. Weighted damped least-squares in kinematic control of robotic manipulators. *Advanced Robotics*, vol. 7, pp. 201–218, 1993.
- S. Chiaverini, B. Siciliano e O. Egeland. Review of the damped least-squares inverse kinematics with experiments on an industrial robot manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 2, pp. 123–134, 1994.
- F. Dogliani, G. Maffezzoni e L. Sciavicco. An open architecture industrial controller. *Newsletter of the IEEE Robotics and Automation Society*, vol. 7, no. 3, pp. 19–21, 1993.
- P. Hsu. Coordinated control of multiple manipulator systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, pp. 400–410, 1993.
- Y.-R. Hu, A.A. Goldenberg e C. Zhou, Motion and force control of coordinated robots during constrained motion tasks. *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, no. 4, pp. 351–365, 1995.
- T. Ishida. Force Control in coordination of two arms. *Proceedings of 5th International Conference on Artificial Intelligence*, pp. 717–722, 1977.
- H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan, New York, 1992.
- O. Khatib. A unified approach to motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, no. 1, pp. 43–53, 1987.

- O. Khatib. Inertial properties in robotic manipulation: An object level framework. *International Journal of Robotics Research*, vol. 13, pp. 19–36, 1995.
- A.J. Koivo e M.A. Unseren. Reduced model order and decoupled control architecture for two manipulators holding a rigid object. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 113, pp. 646–654, 1991.
- S. Hayati. Hybrid position/force control of multi-arm cooperating robots. *Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 82–89, San Francisco, Ca, 1986.
- Z. Li, P. Hsu e S. Sastry. Grasping and coordinated manipulation by a multifingered robot hand. *International Journal of Robotics Research*, vol. 8, no. 4, pp. 33–50, 1989.
- J.Y.S. Luh, M.W. Walker e R.P.C. Paul. Resolved acceleration control of mechanical manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 468–474, 1980.
- J.Y.S. Luh e Y.F. Zheng. Constrained relations between two coordinated industrial robots. *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 3, pp. 60–70, 1987.
- Y. Nakamura, K. Nagai e T. Yoshikawa. Dynamics and stability in coordination of multiple robotic mechanisms. *International Journal of Robotics Research*, vol. 8, no. 2, pp. 44–61, 1989.
- E. Nakano, S. Ozaki, T. Ishida e I. Kato. Cooperational control of the anthropomorphous manipulator MELARM. *Proceedings of 4th International Symposium on Industrial Robots*, pp. 251–260, Tokyo, J, 1974.
- S.A. Schneider e R.H. Cannon. Object impedance control for cooperative manipulation: theory and experimental results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, pp. 383–394, vol. 8, no. 3, 1992.

- L. Sciavicco e B. Siciliano. *Modeling and control of robot manipulators*, McGraw-Hill, New York, 1996.
- S.W. Shepperd. Quaternion from rotation matrix. *AIAA Journal of Guidance and Control*, vol. 1, no. 3, pp. 223–224, 1978.
- B. Siciliano. A closed-loop inverse kinematic scheme for on-line joint-based robot control. *Robotica*, vol. 8, pp. 231–243, 1990.
- J.-J.E. Slotine e W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- J. Szewczyk, F. Caccavale, P. Chiacchio e L. Sciavicco. ERNET activities at the University of Naples: Control of cooperative manipulators. *Proceedings of the Research Workshop of ERNET – European Robotics Network*, pp. 31–40, Darmstadt, D, 1996.
- T.J. Tarn, A.K. Bejczy e X. Yun. Design of dynamic control of two cooperating robot arms: closed chain formulation. *Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, NC, pp. 7–13, 1987.
- T.J. Tarn, A.K. Bejczy e X. Yun. New nonlinear control algorithms for multiple robot arms. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, vol. 24, no. 5, pp. 571–583, 1988.
- P. Tomei. Adaptive PD controller for robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 4, pp. 565–570, 1991.
- M. Uchiyama e P. Dauchez. Symmetric kinematic formulation and non-master/slave coordinated control of two-arm robots. *Advanced Robotics*, vol. 7, no. 4, pp. 361–383, 1993.
- I.D. Walker, R.A. Freeman e S.I. Marcus. Analysis of motion and internal loading of objects grasped by multiple cooperating manipulators. *International Journal of Robotics Research*, vol. 10, no. 4, pp. 396–409, 1991.

- J.T. Wen e K. Kreutz-Delgado. The attitude control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, no. 10, pp. 1148–1162, 1991.
- J.T. Wen e K. Kreutz-Delgado. Motion and force control of multiple robotic manipulators. *Automatica*, vol. 28, pp. 729–743, 1992.
- J.S.C. Yuan. Closed-loop control using quaternion feedback. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, no. 4, pp. 434–440, 1988.
- Y.F. Zheng, J.Y.S. Luh, e P.F. Jia. A real-time distributed computer system for coordinated motion control of two industrial robots. *Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1236–1241, Raleigh, CA, 1987.

Appendice A

Teoremi di La Salle

Gli enunciati riportati sono tratti da (Slotine e Li, 1991). Il primo enunciato è il *teorema locale dell'insieme invariante*, il secondo si riferisce alla versione *globale* del teorema. Per maggiore chiarezza si premette la definizione di *insieme invariante* di un sistema dinamico

Definizione A.1 Si consideri un sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. L'insieme M è detto *insieme invariante* del sistema se ogni traiettoria del sistema che parte in M vi rimane per tutti gli istanti futuri.

□

Teorema A.1 *Si consideri un sistema dinamico non lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con \mathbf{f} continua, sia $V(\mathbf{x})$ una funzione scalare continua con le sue derivate parziali prime. Si assuma che*

- *esista una costante $\ell > 0$ tale che l'insieme $\Omega_\ell = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) < \ell\}$ sia limitato;*
- *$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ in Ω_ℓ .*

Sia R l'insieme costituito da tutti gli elementi di Ω_ℓ dove $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, ed M il più grande insieme invariante in R . Allora ogni traiettoria del sistema $\mathbf{x}(t)$ che ha origine in Ω_ℓ converge ad M per $t \rightarrow \infty$.

◇ ◇ ◇

Teorema A.2 *Si consideri un sistema dinamico non lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con \mathbf{f} continua, sia $V(\mathbf{x})$ una funzione scalare continua con le sue derivate parziali prime. Si assuma che*

- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ per $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ (funzione radialmente illimitata);
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ in tutto lo spazio di stato.

Sia R l'insieme costituito da tutti i punti dello spazio di stato tali che $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, ed M il più grande insieme invariante in R . Allora ogni traiettoria del sistema $\mathbf{x}(t)$ converge ad M per $t \rightarrow \infty$.

◇ ◇ ◇