

**MECCANISMO** (Ing. Meccanica L5 27-11-2001)

Nel meccanismo riportato in fig. 1 (disegno in scala, le misure sono in cm), giacente in un piano verticale, l'asta  $O_1A$  ruota con una velocità angolare costante  $\omega$ . Si chiede di determinare per la configurazione riportata in figura:

1. La velocità e l'accelerazione della massa M
2. Il vettore coppia **C** da applicare all'asta  $O_1A$  per equilibrare dinamicamente il sistema
3. La reazione del vincolo prismatico in D

Si trascuri l'attrito negli accoppiamenti e la massa di tutti i membri ad eccezione della massa M.

Dati:

1. Massa  $M = 10 \text{ Kg}$
2.  $|\omega| = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
3. I dati geometrici sono riportati sul disegno

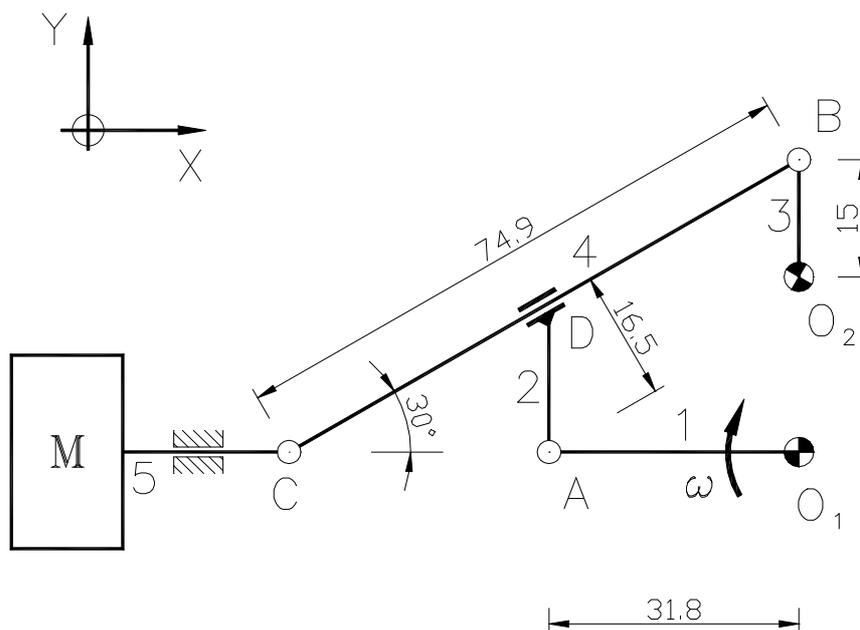


Figura 1: schema funzionale del meccanismo

## SOLUZIONE

Fissato un sistema di riferimento levogiro (l'asse  $z$  è uscente dal piano del foglio) si esegue lo studio dei gradi di libertà del sistema:

I gradi di libertà del sistema, considerato privo di vincoli, sono 15 poiché ogni corpo rigido nel piano possiede tre gradi di libertà e 5 sono i corpi rigidi costituenti il meccanismo in esame. La cerniera fissa in  $O_1$  è un vincolo doppio e toglie due gradi di libertà. Nel punto A la cerniera interna toglie, anch'essa, due gradi di libertà. In D l'incastro scorrevole sottrae ancora due gradi di libertà. La cerniera interna in B, la cerniera fissa  $O_2$  e la cerniera interna in C sottraggono complessivamente 6 gradi di libertà ed infine l'incastro scorrevole che vincola il corpo rigido 5 sottrae ancora due gradi di libertà. In totale il numero dei gradi di libertà sottratti è pari a 14 per cui il meccanismo così vincolato possiede un solo grado di libertà (si può dimostrare che non vi sono vincoli inefficaci). Pertanto un solo parametro lagrangiano è necessario per descrivere la configurazione del sistema. La coordinata angolare  $\theta$  dell'asta 1 è il parametro lagrangiano scelto, poiché inoltre vale la relazione :  $\theta(t) = |\omega|t$  con  $|\omega| = \text{cost}$  (così come indicato nella traccia), il sistema risulta staticamente determinato.

### Studio delle velocità:

Al fine di determinare la velocità del corpo **M** si osservi che la velocità del punto **A** (Fig. 2) è data dalla relazione:

$$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}(\mathbf{O}_1) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{O}_1) = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{O}_1)$$

$$|v(A)| = |\omega| |A - O_1| = 1 \cdot 0.318 = 0.318 \text{ m/s}$$

Passando ad esaminare l'asta 2 si può notare che il vincolo prismatico in **D** impedisce le rotazioni relative del corpo rigido 2 rispetto al rigido 4:  $\boldsymbol{\omega}_{24} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_4 = 0$ . Per tale ragione, il moto relativo dell'asta 2 rispetto ad un osservatore solidale al rigido 4 è un moto di pura traslazione nella direzione dell'asse dell'incastro scorrevole in D, cioè nella direzione del vettore  $(\mathbf{C} - \mathbf{B})$ . Quindi, con riferimento ad un osservatore solidale al corpo 4 si può scrivere:

$$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{A}) + \mathbf{v}_T(\mathbf{A})$$

Nella relazione appena scritta, risulta completamente noto il vettore  $\mathbf{v}(\mathbf{A})$  e per quanto detto precedentemente a proposito del moto relativo di 2 rispetto a 4 risulta nota anche la direzione della velocità  $\mathbf{v}_R(\mathbf{A}) // (\mathbf{C} - \mathbf{B})$ . E' necessario però conoscere anche la direzione della velocità di trascinamento di A per poter risolvere l'equazione vettoriale  $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{A}) + \mathbf{v}_T(\mathbf{A})$ . Si osservi, dunque, che, per definizione<sup>1</sup>, la velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T(\mathbf{A})$  è quella posseduta da quel particolare punto  $A^*$  solidale al corpo rigido 4 che nella configurazione considerata (Fig. 1) occupa la medesima posizione di A. Per determinare la direzione di  $\mathbf{v}_T(\mathbf{A})$  è, quindi, necessario avere

---

<sup>1</sup> Una possibile altra definizione (meno rigorosa) è la seguente: la velocità di trascinamento è la velocità assoluta che avrebbe il punto A se si muovesse solidalmente al corpo 4

informazioni sull'atto di moto del corpo rigido 4 che come evidenziato qui di seguito è un atto di moto traslatorio nella direzione dell'asse  $x$  (Fig. 1):  $\omega_4 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{B}) = \mathbf{v}(\mathbf{C}) = \mathbf{v}_T(\mathbf{A})$ . Infatti, osservando che le velocità assolute  $\mathbf{v}(\mathbf{B})$  e  $\mathbf{v}(\mathbf{C})$  sono parallele all'asse  $x$ , risulta per il teorema di Chasles che il centro di istantanea rotazione del corpo rigido 4 è un punto improprio individuato dalla direzione dell'asse  $y$  (Fig. 1). E', ora possibile risolvere l'equazione vettoriale  $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}_R(\mathbf{A}) + \mathbf{v}_T(\mathbf{A})$  così come riportato in Fig. 2.

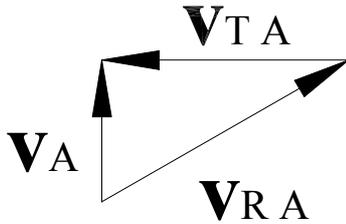


Figure 2: poligono delle velocità in A

Il triangolo costituito dai segmenti orientati rappresentativi dei vettori velocità (Fig. 2) permette di concludere che:

$$|\mathbf{v}(\mathbf{B})| = |\mathbf{v}(\mathbf{C})| = |\mathbf{v}_T(\mathbf{A})| = 0.55 \text{ m/s}$$

$$|\mathbf{v}_R(\mathbf{A})| = 0.64 \text{ m/s}$$

Essendo, con riferimento al corpo rigido 3,  $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = \omega_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2)$  è possibile calcolare la velocità di rotazione  $\omega_3$  che, nel caso in questione, risulta concorde con il versore  $\mathbf{k}$  dell'asse  $z$  del riferimento levogiro scelto  $(x,y,z)$ :

$$\omega_3 = |\omega_3| \mathbf{k} = \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{B})|}{|\mathbf{B} - \mathbf{O}_2|} \mathbf{k} = 3.67 \text{ k rad/s}$$

Il vincolo prismatico sull'asta 5 inoltre garantisce che il moto della stessa sia di pura traslazione cosicché:

$$|\mathbf{v}(\mathbf{C})| = |\mathbf{v}(\mathbf{M})| = 0.55 \text{ m/s}.$$

### Studio delle Accelerazioni:

Si osservi prima di tutto che essendo  $\omega$  un vettore costante:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}(\mathbf{O}_1) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{O}_1) - \boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{A} - \mathbf{O}_1) = -\boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{A} - \mathbf{O}_1)$$

da cui, avendo indicato con  $\mathbf{i}$  il versore dell'asse  $x$ , si ricava:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}) = |\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{A} - \mathbf{O}_1| \mathbf{i} = 0.318 \mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

Ora è possibile scrivere:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{A}) + \mathbf{a}_T(\mathbf{A}) + \mathbf{a}_C(\mathbf{A})$$

laddove l'accelerazione relativa di  $\mathbf{a}_R(\mathbf{A})$  è quella misurata da un osservatore solidale al corpo 4 e, pertanto, è nota in direzione: risulta  $\mathbf{a}_R(\mathbf{A}) \parallel (\mathbf{C} - \mathbf{B})$ . Il moto relativo di 2 rispetto a 4 è, infatti, sempre traslatorio grazie alla guida prismatica in D che ha asse rettilineo. Inoltre l'accelerazione di Coriolis  $\mathbf{a}_C(\mathbf{A}) = 2\boldsymbol{\omega}_4 \wedge \mathbf{v}_R(\mathbf{A})$  è un vettore completamente noto, in questo caso nullo perchè  $\boldsymbol{\omega}_4 = 0$ .

Per quanto riguarda l'accelerazione di trascinamento  $\mathbf{a}_T(\mathbf{A})$ , essa per definizione è quella posseduta da punto  $A^*$  del corpo rigido 4 che nella configurazione considerata (Fig. 1) occupa la medesima posizione di A. Nel nostro caso, poiché il centro di istantanea rotazione  $\mathbf{K}_4$  del corpo rigido 4 è un punto improprio, non è possibile esprimere tale accelerazione in funzione della  $\mathbf{a}(\mathbf{K}_4)$  e quindi utilizzeremo la relazione generale:

$$\mathbf{a}_T(\mathbf{A}) = \mathbf{a}(\mathbf{B}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B}) - \boldsymbol{\omega}_4^2 (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

che, essendo<sup>2</sup>  $\boldsymbol{\omega}_4 = 0$ , si riduce alla:

$$\mathbf{a}_T(\mathbf{A}) = \mathbf{a}(\mathbf{B}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

Per cui sostituendo nella  $\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{A}) + \mathbf{a}_T(\mathbf{A}) + \mathbf{a}_C(\mathbf{A})$  si ottiene:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{A}) + \mathbf{a}(\mathbf{B}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

Ora si osservi che:

$$\mathbf{a}(\mathbf{B}) = \mathbf{a}(\mathbf{O}_2) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) - \boldsymbol{\omega}_3^2 (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) - \boldsymbol{\omega}_3^2 (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2)$$

E sostituendo nella  $\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{A}) + \mathbf{a}(\mathbf{B}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$  si ricava:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{A}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) - \boldsymbol{\omega}_3^2 (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_4 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

---

<sup>2</sup> Si osservi che benché nella configurazione considerata in Fig. 1 (cioè nell'istante considerato)  $\boldsymbol{\omega}_4 = 0$ , ciò non implica  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_4 = 0$  in quanto l'uguaglianza  $\boldsymbol{\omega}_4 = 0$  non vale in ogni istante di tempo ma solo nell'istante considerato.

In questa relazione il vettore  $\mathbf{a}(\mathbf{A})$  è completamente noto, il vettore  $-\omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{O}_2)$  è completamente noto con modulo pari a  $\omega_3^2|\mathbf{B}-\mathbf{O}_2|=2.02\text{ m/s}^2$  mentre dei tre vettori  $\mathbf{a}_R(\mathbf{A})$ ,  $\dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B}-\mathbf{O}_2)$  e  $\dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{A}-\mathbf{B})$  è nota solo la direzione. Pertanto l'equazione vettoriale  $\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{A}) + \dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B}-\mathbf{O}_2) - \omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{O}_2) + \dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{A}-\mathbf{B})$  (equivalente a due equazioni scalari) contiene 3 incognite e quindi non ammette una unica soluzione. Per risolvere il problema allora si tenga presente che:

$$\mathbf{a}(\mathbf{C}) = \mathbf{a}(\mathbf{B}) + \dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{C}-\mathbf{B}) - \omega_4^2(\mathbf{C}-\mathbf{B}) = \mathbf{a}(\mathbf{B}) + \dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{C}-\mathbf{B})$$

Utilizzando la relazione  $\mathbf{a}(\mathbf{B}) = \dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B}-\mathbf{O}_2) - \omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{O}_2)$  si ricava:

$$\mathbf{a}(\mathbf{C}) = \dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B}-\mathbf{O}_2) - \omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{O}_2) + \dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{C}-\mathbf{B})$$

Si osservi che, nella relazione precedentemente scritta, il vettore  $-\omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{O}_2)$  è completamente noto mentre i tre vettori  $\mathbf{a}(\mathbf{C})$ ,  $\dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B}-\mathbf{O}_2)$  e  $\dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{C}-\mathbf{B})$  sono noti solo in direzione. Questa volta, però, risulta  $\mathbf{a}(\mathbf{C}) \parallel \dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B}-\mathbf{O}_2)$  per cui posto  $\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{C}) - \dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B}-\mathbf{O}_2)$  la precedente relazione diventa:

$$\mathbf{u} = -\omega_3^2(\mathbf{B}-\mathbf{O}_2) + \dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{C}-\mathbf{B})$$

Essa può essere risolta come mostrato in Fig. 3.

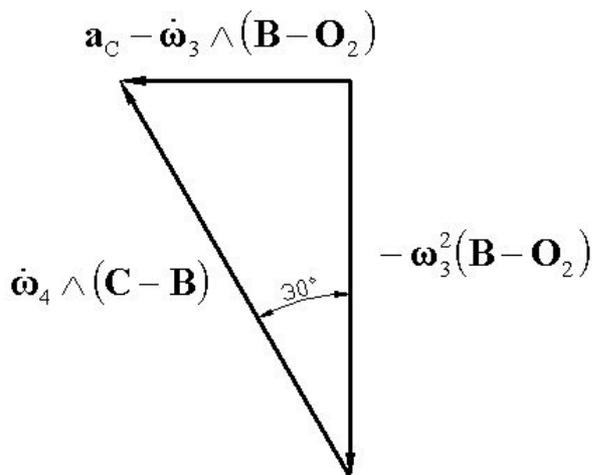


Figure 3: poligono delle accelerazioni in C

Dalla quale si può calcolare il vettore  $\dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{C}-\mathbf{B})$  è quindi il vettore  $\dot{\omega}_4$  che risulterà diretto in verso opposto al versore positivo  $\mathbf{k}$  dell'asse  $z$ :

$$\dot{\omega}_4 = -\frac{|\dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{C}-\mathbf{B})|}{|\mathbf{C}-\mathbf{B}|} \mathbf{k} = -3.12 \mathbf{k} \text{ rad} / \text{s}^2$$

Ritornando alla relazione:

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_R(\mathbf{A}) + \dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) - \omega_3^2 (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) + \dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

risulta che il vettore  $\dot{\omega}_4 \wedge (\mathbf{A} - \mathbf{B})$  è ormai completamente noto, pertanto si può procedere alla soluzione grafica della stessa come rappresentato in Fig. 4.:

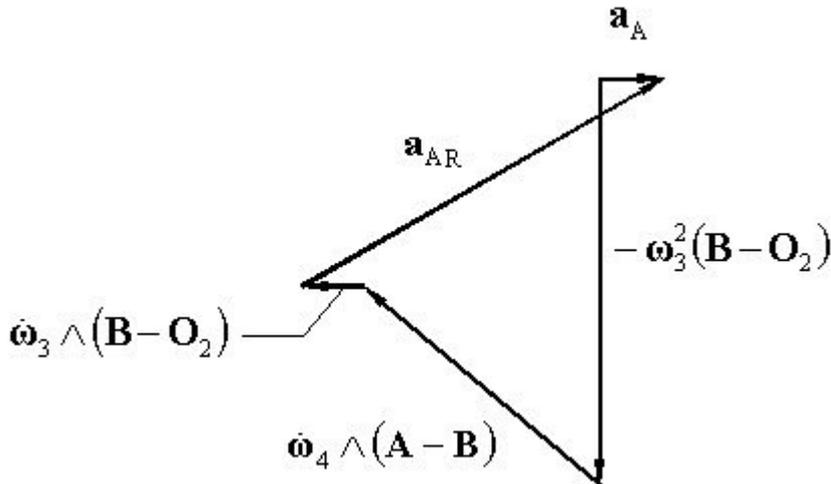


Figure 4: poligono delle accelerazione in A

Si è, quindi, in grado di determinare  $\dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2)$ ,  $\dot{\omega}_3$ :

$$\dot{\omega}_3 = k \frac{|\dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2)|}{|\mathbf{B} - \mathbf{O}_2|} = k 2.00 \text{ rad/s}^2$$

e il vettore  $\mathbf{a}(\mathbf{C}) = \mathbf{u} + \dot{\omega}_3 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{O}_2) = \mathbf{a}(\mathbf{M}) = -\mathbf{i} |\mathbf{a}(\mathbf{C})| = -\mathbf{i} 1.46 \text{ m/s}^2$  (vedi Fig. 5).

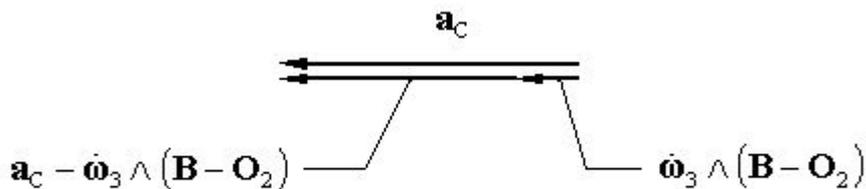


Figure 5: calcolo dell'accelerazione  $\mathbf{a}(\mathbf{C})$ .

## Studio delle forze

Per determinare le forze agenti sui vari elementi rigidi del sistema è necessario eseguire lo schema di corpo libero dei vari elementi e farne l'equilibrio. Si consideri come primo elemento il corpo rigido 5 sul quale agiscono la forza d'inerzia  $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}(\mathbf{M})$  applicata nel baricentro della massa  $M$  e la forza peso  $mg$  anch'essa applicata nel baricentro della massa  $M$ . Si osservi che, essendo il moto del corpo 5 puramente traslatorio, il momento delle forze d'inerzia calcolato rispetto al centro di massa di  $M$  (la cosiddetta coppia di inerzia  $\mathbf{C}_i = -I_G\dot{\boldsymbol{\omega}}_5$ ) risulta essere nullo. La forza peso e la forza d'inerzia possono essere ridotte ad un solo vettore risultante equivalente così come rappresentato in Fig. 6.

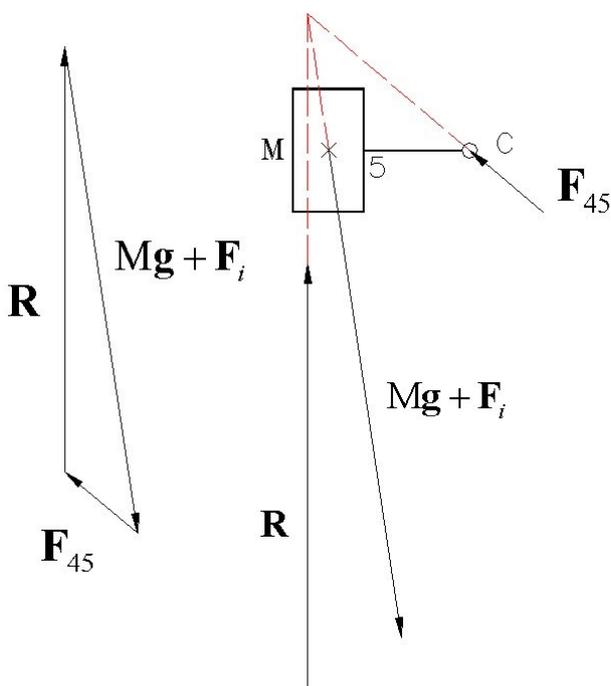


Figure 6: equilibrio del corpo 5.

Sul corpo 5 agiscono, inoltre, la reazione della guida prismatica, che è costituita da una forza  $\mathbf{R}$  più una coppia di reazione (ricordiamo che il vincolo prismatico è doppio in quanto impedisce le traslazioni in direzione normale all'asse di scorrimento e le rotazioni nel piano). Questo sistema di forze è però equivalente ad un unico vettore applicato  $\mathbf{R}$  dato che la coppia di reazione e il vettore  $\mathbf{R}$  sono tra loro ortogonali (l'invariante scalare del sistema di vettori è nullo). Chiaramente il punto di applicazione del vettore risultante equivalente si troverà sull'asse centrale, che, dovendo essere parallelo ad  $\mathbf{R}$ , apparterrà al fascio improprio di rette ortogonali all'asse di scorrimento della guida prismatica. Sul corpo  $M$  inoltre agisce anche la forza  $\mathbf{F}_{45}$  applicata in  $C$ . La direzione di  $\mathbf{F}_{45}$  non è a priori determinabile cosicché le incognite da calcolare sono 4 mentre le equazioni di equilibrio del corpo 5 sono equivalenti a 3 equazioni scalari. Per poter risolvere il problema è quindi necessario considerare l'equilibrio del corpo 4, sul quale agisce la forza  $\mathbf{F}_{54}$  opposta alla  $\mathbf{F}_{45}$  anch'essa applicata in  $C$ . Inoltre sul rigido 4 agisce anche la forza  $\mathbf{F}_{34}$  la cui retta di azione è completamente nota (retta  $BO_2$ ), in quanto l'equilibrio del corpo 3 (caricato soltanto da due forze una  $\mathbf{F}_{34}$  applicata in  $B$  e l'altra  $\mathbf{R}_{O_2}$  in  $O_2$ ) impone che  $\mathbf{F}_{34}$  e  $\mathbf{R}_{O_2}$  siano opposte con la medesima retta di azione (Fig. 8). Vi è ancora un'altra forza  $\mathbf{F}_{24}$  che agisce su 4: essa è la risultante equivalente delle azioni del

vincolo prismatico in D. La retta d'azione della  $F_{24}$ , che deve appartenere al fascio improprio di rette ortogonali all'asse della guida prismatica in D, può essere facilmente determinata imponendo l'equilibrio dell'elemento 2 (Fig. 10) sul quale agiscono la  $F_{42}$  e la  $F_{12}$ , queste due forze per sono, quindi, opposte e hanno la stessa retta d'azione. Quest'ultima deve passare per A ed appartenere al fascio di rette improprio ortogonale alla guida prismatica in D, la retta d'azione di  $F_{42}$  è rappresentata dalla retta condotta per A e ortogonale all'asse della guida prismatica in D.

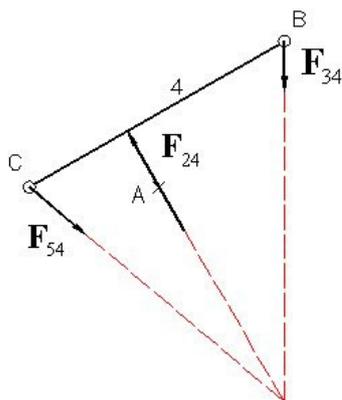


Figure 7: equilibrio dell'elemento 4

Ritornando all'elemento 4 (Fig. 7) sono ora note le rette d'azione delle forze  $F_{24}$  e  $F_{34}$ , conseguentemente l'equilibrio dei momenti impone che la retta d'azione della forza  $F_{54}$  passi per il punto di intersezione delle rette d'azione delle forze  $F_{24}$  e  $F_{34}$  (Fig. 7). Ciò permette di risolvere l'equilibrio del corpo 5. La retta d'azione delle vettore risultate equivalente  $R$  deve quindi essere ortogonale al vincolo prismatico e passare per il punto di intersezione delle rette di azione delle altre due forze agenti su M. E' possibile quindi, costruire il poligono delle forze e risolvere l'equilibrio del corpo 5 (Fig. 6).

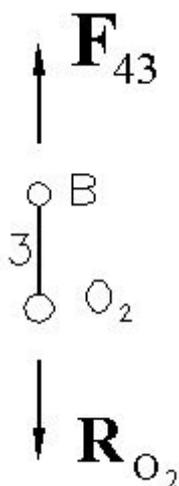


Figure 8: equilibrio dell'elemento 3

Ora, è possibile risolvere l'equilibrio delle forze sul corpo 4 (Fig. 9), determinare, quindi la  $\mathbf{F}_{24}$  e la  $\mathbf{F}_{42} = -\mathbf{F}_{24}$  e dall'equilibrio del corpo rigido 2 (Fig. 10) ricavare  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{42}$  avente modulo  $|\mathbf{F}_{21}| = 29.3 \text{ N}$

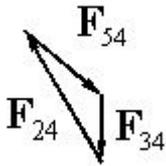


Figure 9: poligono delle forze corpo 4

Una volta nota la forza  $\mathbf{F}_{21}$  l'equilibrio del corpo 1 (Fig. 11) ci permette di calcolare la coppia  $C$  e la reazione  $\mathbf{R}_{O1}$   $\mathbf{R}_{O1} = -\mathbf{F}_{21}$  agenti sull'asta 1 per garantire l'equilibrio del sistema.

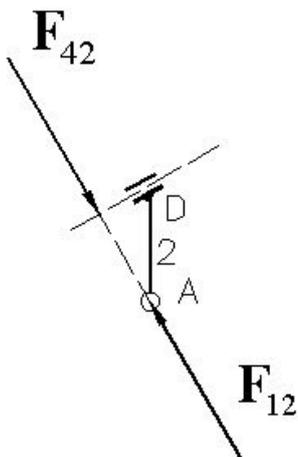


Figure 10: equilibrio del corpo 2

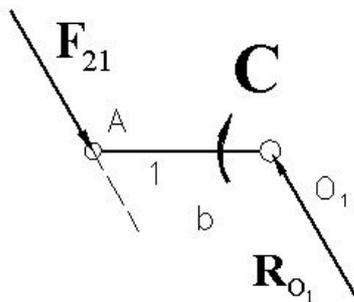


Figure 11: equilibrio del corpo 1

$|C| = |F_{21}|b = 8.03 \text{ Nm}$ , dove con  $b$  si è indicato il braccio della forza.